Ponavljanje...

Vektorska algebra

$$\vec{a} = \vec{a}(x_1, y_1, z_1) \qquad |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$
$$\vec{b} = \vec{b}(x_2, y_2, z_2) \qquad |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

Zbir vektora $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$

Skalarni proizvod $m = \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$

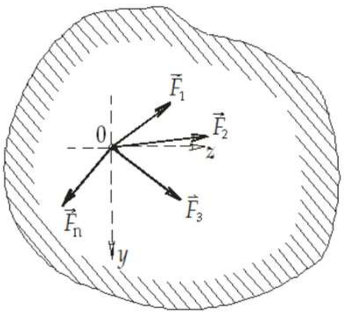
Skalar-veličina za koju je potrebno znati samo brojnu vrednost bez određivanja pravca

Intenzitet skalarnog proizvoda $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Sistem sila u ravni sa zajedničkom napadnom tačkom

Sistem sila sa zajedničkom napadnom tačkom (O)



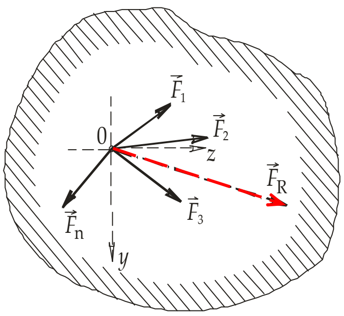
Sistem sila sa zajedničkom napadnom tačkom može da se svede na dva slučaja:

REZULTANTA **RAVNOTEŽA**

Ovakav sistem sila može se ispitati analitički **ili** grafički**, pa postoje analitički i grafički uslovi koji su potrebni da bi se sistem sila sa zajedničkom napadnom tačkom sveo na rezultantu ili ravnotežu.**

Sistem sila sa zajedničkom napadnom tačkom

REZULTANTA - analitički



Analitički uslov potreban da se sistem sila sa zajedničkom napadnom tačkom svede na **rezultantu** dat je vektorskom jednačinom:

$$\boxed{\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \neq 0} \qquad (\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n})$$

Kada se rešava zadatak, sile se mogu sabrati:

- **Vektorski** (pogledati III aksiom): $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$
- **Skalarno:** $Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i \;,\; Z_R = \sum_{i=1}^{n} Z_i \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_R(Y_R, Z_R)$

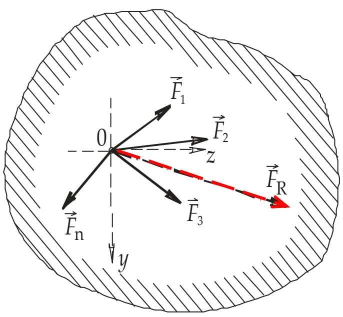
Intenzitet rezultante: $F_R = \sqrt{Y_R^2 + Z_R^2}$

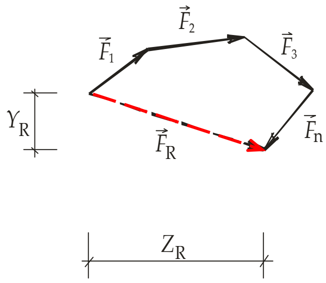
Y_i, Z_i, Y_R, Z_R – algebarske vrednosti projekcije odgovarajuće sile na ose y i z

Sistem sila sa zajedničkom napadnom tačkom

REZULTANTA - grafički

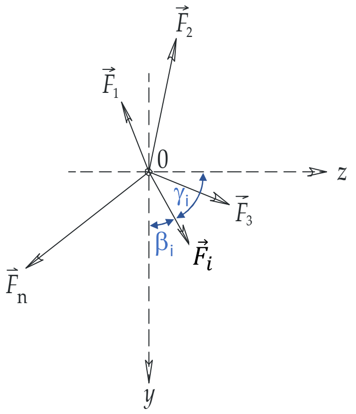
Grafički uslov da se ovakav sistem sila svede na **rezultant**u jeste da **poligon sila mora biti otvoren.**





Sistem sila sa zajedničkom napadnom tačkom

RAVNOTEŽA - analitički



Analitički uslov potreban da sistem sila sa zajedničkom napadnom tačkom bude u **ravnoteži** dat je vektorskom jednačinom:

$$\boxed{\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0} \qquad (\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n})$$

Skalarni oblik

$$Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{F}_i\right| \cdot \cos\beta_i = 0$$

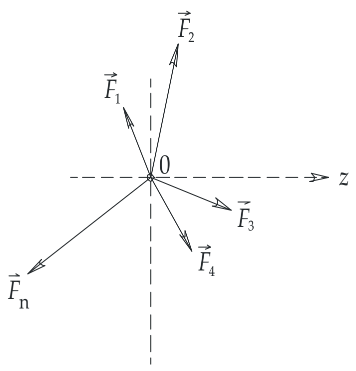
$$Z_R = \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{F}_i\right| \cdot \cos\gamma_i = 0$$

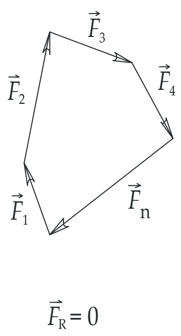
$\beta_i,\ \gamma_i$ – uglovi koje sile zaklapaju sa osama $\boldsymbol{y}$ i z

Sistem sila sa zajedničkom napadnom tačkom

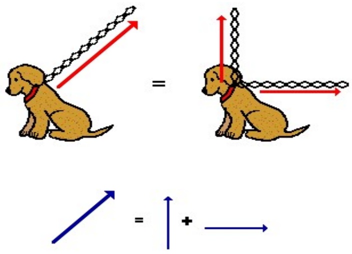
RAVNOTEŽA – grafički

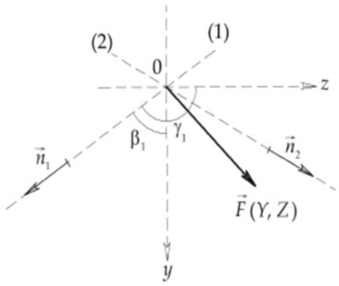
Grafički uslov da se ovakav sistem sila svede na **ravnotežu** jeste da **poligon sila mora biti zatvoren**

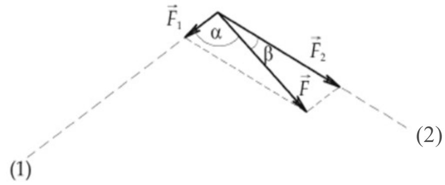




RAZLAGANJE SILE NA DVA PRAVCA KOJI SE SEKU NA NJENOJ NAPADNOJ LINIJI







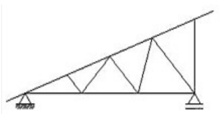
Uslov: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

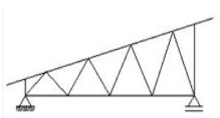
Grafički, ovaj zadatak se svodi na konstrukciju paralelograma ako su dati njegova dijagonala i uglovi koje dijagonala zaklapa sa ivicama.

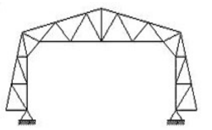
Analitičko rešenje ovog zadatka pogledati u udžbeniku, a primeri će biti urađeni na vežbama.

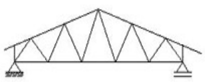
Sistem sila sa zajedničkom napadnom tačkom

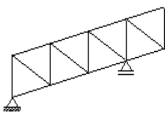
Primeri: Rešetkasti nosači





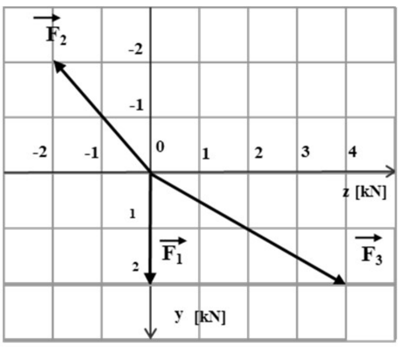


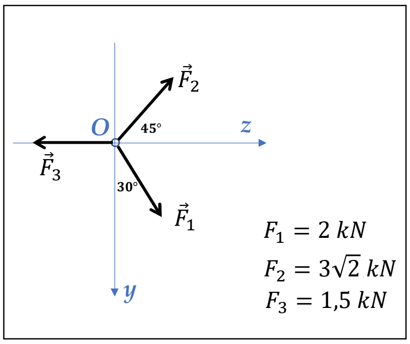


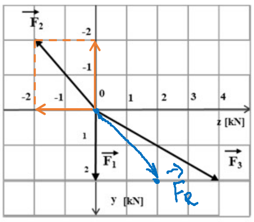


PRIMERI

U sledećim primerima ispitati date sisteme sila (proveriti da li se sistemi svode na rezultantu ili su sile u ravnoteži.







Ovo je sistem sila SA zajedničkom napadnom tačkom. Posle određivanja koordinata svake sile lako možemo odrediti i njihovu rezultantu, pa je zatim i nacrtati. I ona polazi iz iste napadne tačke.

Vektorska algebra

$\bar{a} = \bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ $\quad |\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

$\bar{b} = \bar{b}(x_2, y_2, z_2)$ $\quad |\bar{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$

Zbir vektora $\quad \bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j} + (z_1 + z_2)\bar{k}$

Skalarni proizvod $\quad m = \bar{a} \cdot \bar{b} = (\bar{a}, \bar{b})$

Skalar-veličina za koju je potrebno znati samo brojnu vrednost bez određivanja pravca

Intenzitet skalarnog proizvoda $\quad |\bar{a} \cdot \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\alpha$

$|\bar{a} \cdot \bar{b}| = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$\vec{F}_i(Y_i, Z_i)$ [kN]

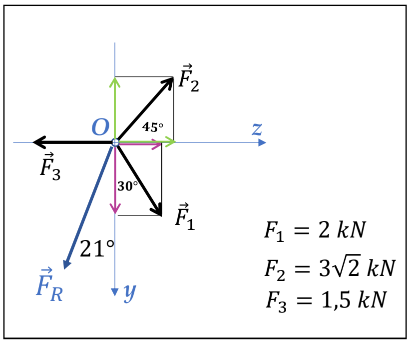
$\vec{F}_1(Y_1, Z_1)$ $\quad \vec{F}_1(2, 0)$ [kN]

$\vec{F}_2(-2, -2)$ [kN]

$\vec{F}_3(2, 4)$ [kN]

$\vec{F}_R(2, 2)$ [kN]

Y_i, Z_i, Y_R, Z_R – **algebarske** vrednosti projekcije odgovarajuće sile na ose ***y*** i ***z***



$\vec{F}_1(Y_1, Z_1)$

$$Y_1 = F_1 \cdot cos30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ \text{kN} = 1{,}73\ \text{kN}$$

$$Z_1 = F_1 \cdot cos60° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\ kN$$

$\vec{F}_2(Y_2, Z_2)$

$$Y_2 = -F_2 \cdot cos45° = -3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\ kN$$

$$Z_2 = F_2 \cdot cos45° = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\ kN$$

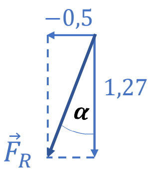
$\vec{F}_1(\sqrt{3}, 1)$ kN

$\vec{F}_2(-3, 3)$ kN

$\vec{F}_3(0; -1{,}5)$ kN

$\vec{F}_R\ (1{,}27; -0{,}5)\ kN$

I ovo je sistem sila SA zajedničkom napadnom tačkom. Ako želimo da odredimo i njihovu rezultantu, prvo određijemo njene koordinate sabiranjem koordinata svih sila po „y“ i po „z“ pravcu. Da bismo odredili i pravac rezultante, moramo da odredimo ugao koji ona zaklapa sa vertikalom (ili horizontalom).



$$tg\alpha = \frac{0{,}5}{1{,}27} = 0{,}3937$$

$$\alpha = \text{arctg}(0{,}3937)$$

$$\alpha \approx 21°$$

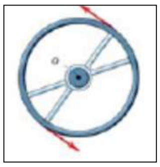
23. oktobar 2023.

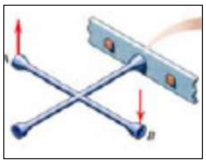
Knjiga, str. 18-26

TEHNIČKA MEHANIKA 2. predavanje

Spreg sila

SPREG SILA **čine dve paralelne sile istih intenziteta a suprotnih smerova.**

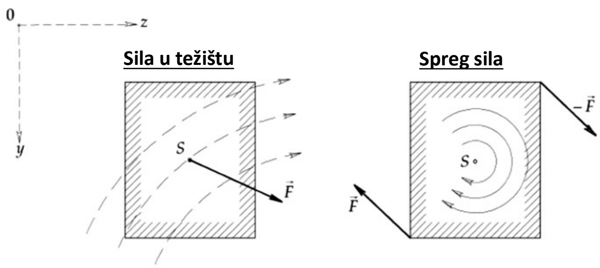




Mera mehaničkog uticaja sprega sila na telo je **moment sprega.**
Jedinica za moment sprega je **džul (J)**.

$$[1\, J = 1\, Nm]$$

! Sila ne može zameniti spreg, niti spreg može zameniti silu



Telo se kreće translatorno

Telo rotira

Sila **nije slobodan** vektor.

Moment sprega je **slobodan** vektor.

OSNOVNI ELEMENTI SPREGA SILA

sprežne sile $(\vec{F}, -\vec{F})$

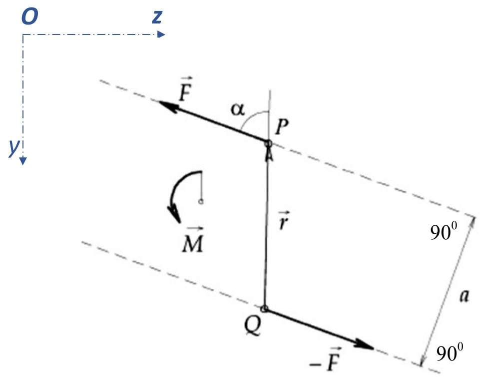
sprežna ravan,

krak sprega a,

vektor položaja $\vec{r} = \overrightarrow{QP}$

$$\left.\begin{aligned} &P(y_P, z_P) \\ &Q(y_Q, z_Q) \end{aligned}\right\} \quad \vec{r}(y_P - y_Q; z_P - z_Q)$$

$$\vec{F}(Y, Z)$$

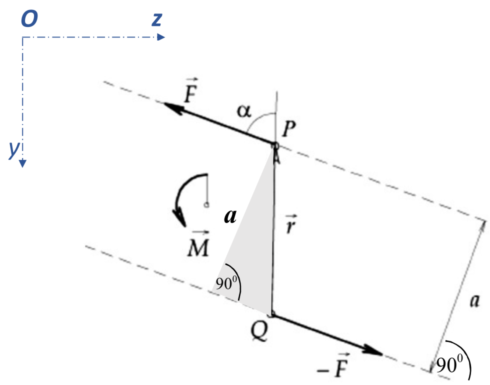


ANALITIČKO ODREĐIVANJE MOMENTA SPREGA
(kao vektorskog proizvoda vektora položaja i sprežne sile)

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [Nm = J]}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{QP} \qquad \left.\begin{aligned} &P(y_P, z_P) \\ &Q(y_Q, z_Q) \end{aligned}\right\} \quad \vec{r}(y_P - y_Q; z_P - z_Q)$$

$$\vec{F}(Y, Z)$$



Intenzitet momenta sprega:

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot sin\alpha = a \cdot |\vec{F}|$$

Algebarska vrednost momenta sprega:

$$M = \begin{vmatrix} y_P - y_Q & z_P - z_Q \\ Y & Z \end{vmatrix}$$

Kako se dolazi do gornjih izraza za intenzitet i algebarsku vrednost momenta sprega?

$$\left.\begin{array}{l} P(y_P, z_P) \\ Q(y_Q, z_Q) \end{array}\right\} \vec{r}(y_P - y_Q; z_P - z_Q)$$

$$\vec{F}(Y, Z)$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [Nm = J]}$$

$$M = \begin{vmatrix} y_P - y_Q & z_P - z_Q \\ Y & Z \end{vmatrix}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot sin\alpha = a \cdot |\vec{F}|$$

Vektorski proizvod

$$\vec{a} = \vec{a}(x_1, y_1, z_1)$$

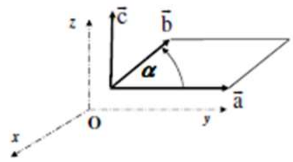
$$\vec{b} = \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

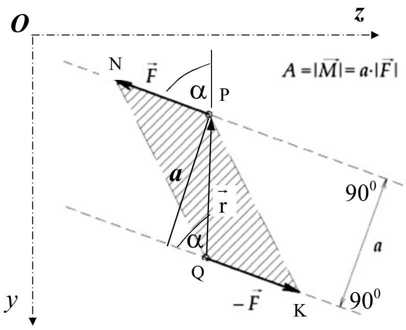
$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

Intenzitet vektorskog proizvoda

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$$



Spreg sila – analitičko određivanje

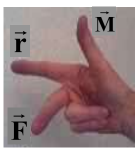


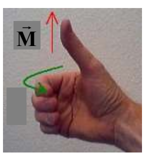
$$A_{QKPN} = |\vec{M}| = a \cdot |\vec{F}|$$

$$a = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{F}|} = |\vec{r}| \cdot sin\alpha$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot sin\alpha \cdot |\vec{F}| = a \cdot |\vec{F}|$$

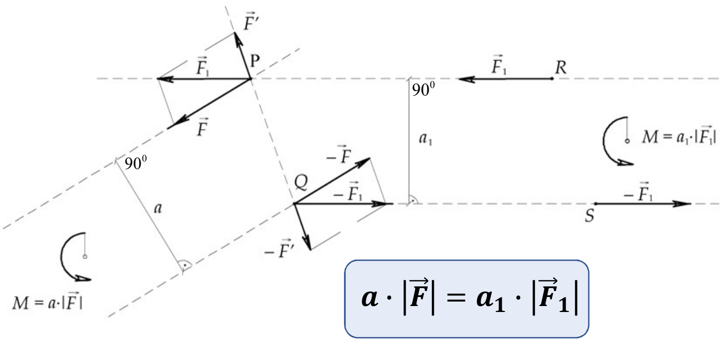
Za određivanje pravca i smera vektora momenta sprega koristi se pravilo desne ruke ili desnog zavrtnja.





TRANSFORMACIJA SPREGOVA

- ✓ Dat je spreg sila $\left(\vec{F}, -\vec{F}\right)$
- ✓ Dodajemo ravnotežan sistem sila $(\vec{F}', -\vec{F}')$ (II aksiom Statike)
- ✓ Rezultanta (zbir) sila $\vec{F}$ i $\vec{F}'$ je sila $\vec{F}_1$(III aksiom Statike). Na isti način se dobija i sila -$\vec{F}_1$.



$$\boldsymbol{a} \cdot |\vec{\boldsymbol{F}}| = \boldsymbol{a_1} \cdot |\vec{\boldsymbol{F}}_1|$$

Zaključak:

- Spreg sila se može slobodno prenositi po ploči, time se njegov mehanički uticaj na ploču neće promeniti. Moment sprega je **slobodan vektor**.
- Pojedini elementi sprega (sprežne sile ili krak) mogu se menjati a da se mehanički uticaj sprega na ploču ne promeni, **pod uslovom da se ne promeni vektor momenta sprega.**

SABIRANJE I RAVNOTEŽA SPREGOVA

Sabiranje mehaničkih dejstava spregova svodi se na sabiranje njihovih momenata. Pri tome se dobije ili rezultujući moment sprega ili su spregovi u ravnoteži.

Algebarska vrednost rezultujućeg momenta sprega:

$$M_R = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

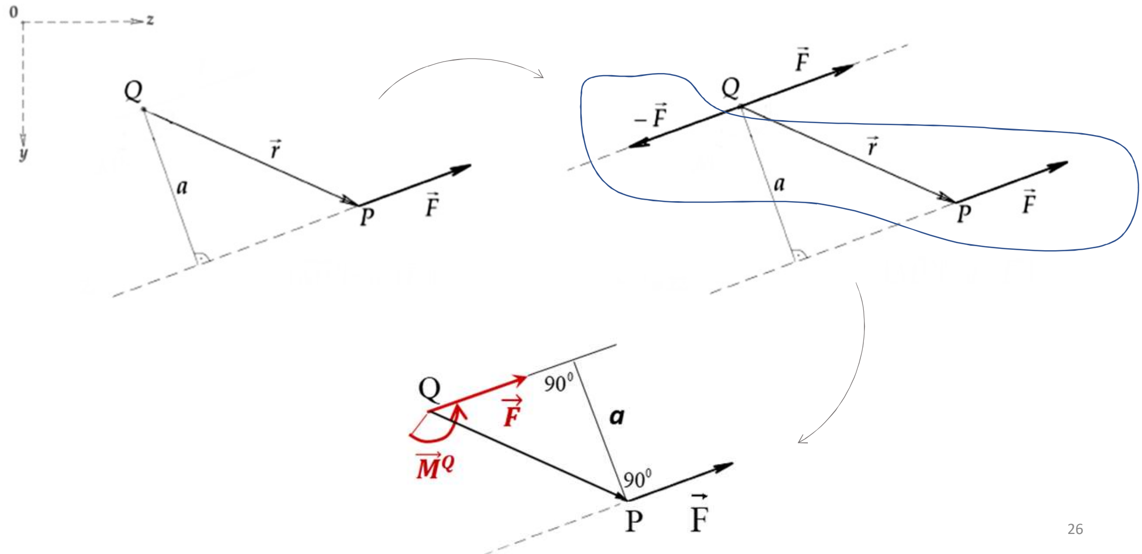
Sistem spregova biće u ravnoteži ako je rezultujući moment jednak nuli.

Algebarska vrednost rezultujućeg momenta u slučaju ravnoteže spregova:

$$M_R = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0$$

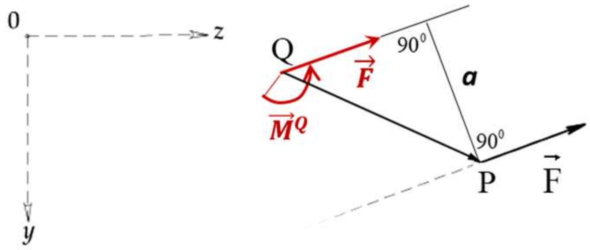
Redukcija sile na tačku

<u>REDUKCIJA SILE NA TAČKU</u> **je pomeranje sile paralelno samoj sebi, u napadnu tačku koja ne leži na njenoj napadnoj liniji.**



$$\vec{M}^Q = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (\vec{r} = \overrightarrow{QP})$$

$$|\vec{M}^Q| = a \cdot |\vec{F}|$$



$\vec{M}^Q$ - **redukcioni moment** sile $\vec{F}$ za tačku Q

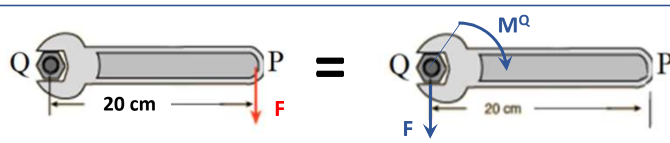
Mehaničko dejstvo sile s napadnom tačkom P na kruto telo ekvivalentno je zbirnom dejstvu jednake sile u tački Q i redukcionog momenta sile u odnosu na tačku Q.

Vektori $\vec{M}^Q$ i $\vec{F}$ u tački Q čine mehaničku veličinu koja se zove **torzer.**

Kako se računa redukcioni moment u praksi?

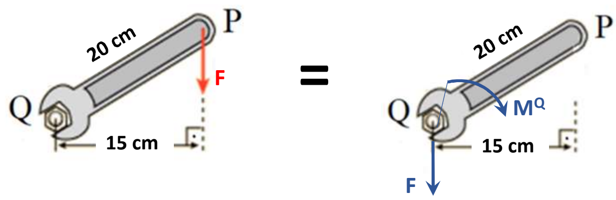
Ključem dužine 20 cm pokušavamo da odvijemo zavrtanj u tački Q. Na krajnju tačku ključa, P, delujemo silom F=120 N. (Važno: Ovo važi za slučaj da ne uspevamo da odvijemo zavrtanj, tj. da je zavrtanj i dalje <u>kruto povezan sa vijkom</u>.)

(a)



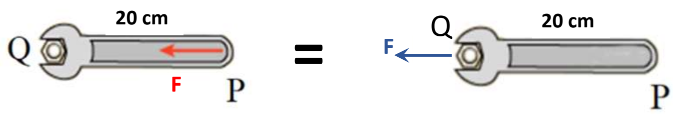
$M^Q = F \cdot a$ = 120N·0,2m = 24 Nm

(b)



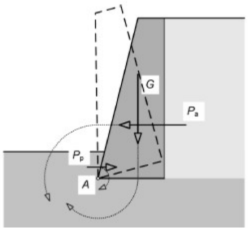
$M^Q = F \cdot a$ = 120N·0,15m = 18 Nm

(c)

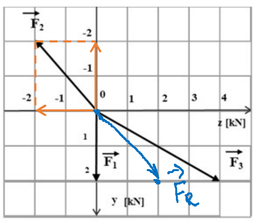


$M^Q = 0$

SISTEM SILA U RAVNI BEZ ZAJEDNIČKE NAPADNE TAČKE



Sistem sila SA zajedničkom napadnom tačkom



Ovo je sistem sila SA zajedničkom napadnom tačkom. Posle određivanja koordinata svake sile lako možemo odrediti i njihovu rezultantu, pa je zatim i nacrtati. I ona polazi iz iste napadne tačke.

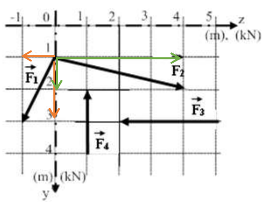
$\vec{F}_i(Y_i, Z_i)$ [kN]

$\vec{F}_1(Y_1, Z_1)$

$\vec{F}_1(2, 0)$ [kN]
$\vec{F}_2(-2, -2)$ [kN]
$\vec{F}_3(2, 4)$ [kN]

$\vec{F}_R(2, 2)$ [kN]

Sistem sila BEZ zajedničke napadne tačke



Ovo je sistem sila BEZ zajedničke napadne tačke. Posle određivanja koordinata svake sila i ovde možemo odrediti i njihovu rezultantu, ali ne možemo da je ucrtamo na crtež. Iz koordinata rezultante možemo da vidimo koji je njen nagib (vertikalna je i usmerena naniže), ali ne možemo da kažemo koja joj je napadna linija.

$\vec{F}_i(Y_i, Z_i)$

$\vec{F}_1(2, -1)$ kN
$\vec{F}_2(1, 4)$ kN
$\vec{F}_3(0, -3)$ kN
$\vec{F}_4(-2, 0)$ kN

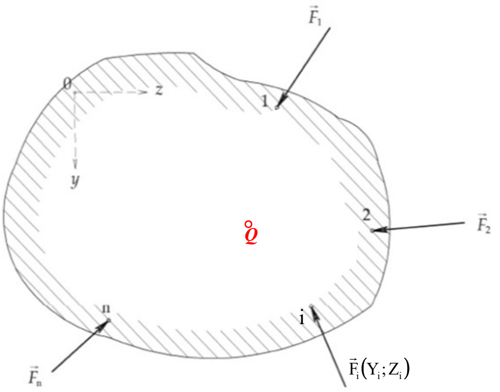
$\vec{F}_R(1, 0)$

Ne znamo položaj napadne linije rezultante!

Y_i, Z_i, Y_R, Z_R – **algebarske** vrednosti projekcije odgovarajuće sile na ose y i z

Na krutu ploču u yOz ravni, u tačkama 1(y_1, z_1),....., n(y_n, z_n) deluju sile

$\vec{F}_1(Y_1, Z_1)$, $\vec{F}_2(Y_2, Z_2)$,...., $\vec{F}_n(Y_n, Z_n)$



- sile redukujemo na proizvoljnu tačku Q
- sve sile će sada imati zajedničku napadnu tačku Q, a uz to, pojaviće se i n redukcionih momenata: $\vec{M}_i^Q = \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots n)$.

Sile i momente sada možemo lako sabrati:

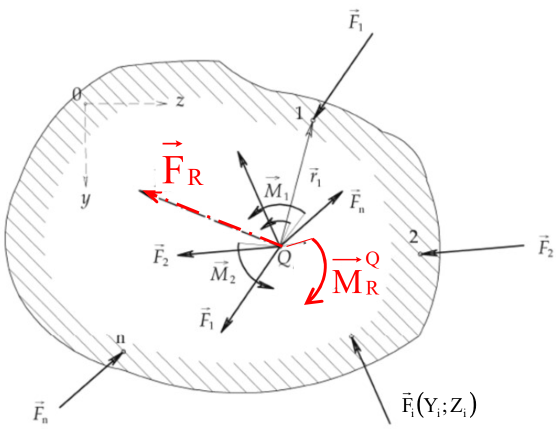
- Rezultanta svih sila je **redukciona rezultanta**

$$\vec{F}_R = \sum_i^n \vec{F}_i$$

- Rezultanta svih momenata je **redukcioni moment**

$$\vec{M}_R^Q = \sum_i^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

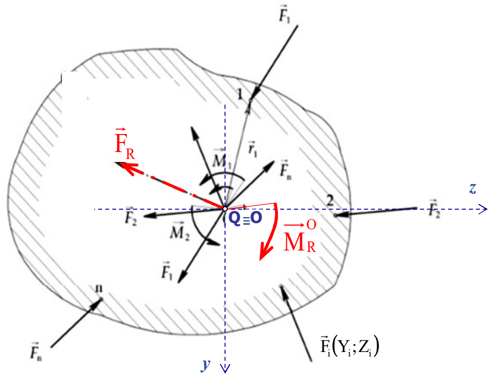
Sistem sila je u tački Q ekvivalentno zamenjen torzerom $\vec{F}_R$, $\vec{M}_R^Q$.



- **Redukciona rezultanta ne zavisi od izbora redukcione tačke**
- **Redukcioni moment zavisi od izbora redukcione tačke. (Zato nosi indeks Q !)**

ANALITIČKO ISPITIVANJE SISTEMA SILA

- **Za tačku na koju redukujemo sile najlakše je odabrati koordinatni početak.**
- **Analitičko ispitivanje sistema sila bez zajedničke napadne tačke svodi se na određivanje vektora $\vec{F}_R$ i $\vec{M}_R^O$.**



$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = ?$$

$$\vec{M}_R^O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = ?$$

Sistem sila u ravni bez zajedničke napadne tačke

ANALITIČKO ISPITIVANJE SISTEMA SILA $\vec{F}_R = ?$ $\vec{M}_R^O = ?$

- koordinate rezultante $\vec{F}_R(Y_R, Z_R)$
- koordinate sila $\vec{F}_i(Y_i, Z_i)$, $(i = 1, 2, \dots n)$.
- vektori položaja napadnih tačaka $\vec{r}_i\,(y_i, z_i)$ (iste koordinate kao koord. napadnih tačaka sila)

vektorski oblik		skalarni oblik
$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = ?$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i = ? \\ Z_R = \sum_{i=1}^{n} Z_i = ? \end{cases}$
$\vec{M}_R^O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = ?$	$\Rightarrow$	$M_R^O = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_i & z_i \\ Y_i & Z_i \end{vmatrix} = ?$

Postoje 3 mogućnosti:

1) **sistem se svodi na rezultantu – sve sile ekvivalentno zamenjuje jedna sila (rezultanta); treba naći i položaj rezultante – njenu napadnu liniju!**
2) **sistem se svodi na spreg – sistem ekvivalentno zamenjuje spreg sila**
3) **sistem je u ravnoteži**

1°

ANALITIČKI uslov da se sistem sila bez zajedničke tačke svede na REZULTANTU: $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \neq 0$

KAKO SE ODREĐUJE REZULTANTA (analitički)? $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = ?$

• **koordinante rezultante** $Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ i $Z_R = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ $\Rightarrow$ $\vec{F}_R(Y_R; Z_R)$

$\vec{F}_i(Y_i, Z_i)$ - **koordinate sila**

• **napadna linija rezultante** – iz uslova da je redukcioni moment rezultante u odnosu na neku tačku (npr. koordinatni početak) jednak ukupnom redukcionom momentu svih sila

• **napadna linija rezultante –** iz uslova da je redukcioni moment rezultante u odnosu na neku tačku (npr. koordinatni početak) jednak ukupnom redukcionom momentu svih sila

Ukupni redukcioni moment svih sila u odnosu na koordinatni početak (algebarska vrednost)	Redukcioni moment rezultante u odnosu na koordinatni početak (algebarska vrednost)
$M_R^O = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_i & z_i \\ Y_i & Z_i \end{vmatrix}$	$M_{Rez}^O = \begin{vmatrix} y & z \\ Y_R & Z_R \end{vmatrix} = Z_R \cdot y - Y_R \cdot z$

$\vec{r}_i\,(y_i, z_i)$ - koordinate vektora položaja (koord. napadnih tačaka sila)

$\vec{F}_i(Y_i, Z_i)$ - koordinate sila

y, z - tekuće koordinate prave

Odakle potiču gornji izrazi?

Vektorski proizvod u prostoru:

$$\vec{a} = \vec{a}(x_1, y_1, z_1)$$
$$\vec{b} = \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$$
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$
$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

Vektorski proizvod u ravni yOz:

$$\vec{a} = \vec{a}(y_1, z_1)$$
$$\vec{b} = \vec{b}(y_2, z_2)$$
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y_1 & z_1 \\ 0 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1) \cdot \vec{i}$$

Iz uslova da je $M_{Rez}^O = M_R^O$ sledi izraz za jednačinu napadne linije rezultante u skalarnom obliku:

$$\boxed{Z_R \cdot y - Y_R \cdot z = M_R^O}$$

2°

ANALITIČKI uslov da se sistem sila bez zajedničke tačke svede na **SPREG:**

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \quad \text{i} \quad \vec{M}_R^Q = \overrightarrow{const.} \neq 0$$

TREBA DOKAZATI (analitički) :

• **koordinante rezultante su nule**

$$Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$$
$$Z_R = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_R(Y_R, Z_R) = 0$$

• **rezultujući redukcioni moment svih sila u odnosu na npr. koordinatni početak je različit od nule**

$$\vec{M}_R^O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad M_R^O = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_i & z_i \\ Y_i & Z_i \end{vmatrix} \neq 0$$

3°

ANALITIČKI uslov da sistem sila bez zajedničke tačke bude U RAVNOTEŽI: $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$ i $\overrightarrow{M}_R^Q = 0$

TREBA DOKAZATI (analitički) :

- koordinante rezultante su nule

$$Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \quad \text{i} \quad Z_R = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \implies \vec{F}_R(Y_R, Z_R) = 0$$

- rezultujući redukcioni moment svih sila u odnosu na npr. koordinatni početak jednak je nuli (biće tako i za svaku drugu tačku!)

$$\overrightarrow{M}_R^O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 \implies M_R^O = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_i & z_i \\ Y_i & Z_i \end{vmatrix} = 0$$