

10. ТАЛАСНО КРЕТАЊЕ

10.1. Механички таласи

Таласно кретање се јавља у скоро свим областима физике. Постоје више врста таласа. Према томе која физичка средина преноси таласе они се деле на: механичке (звучне), електромагнетне, таласе вероватноће итд.

Таласи који се простиру кроз еластичну средину називају се механички таласи. Они настају када се делић средине помери из свог равнотежног положаја и настави да осцилује око њега. Због еластичних особина средине поремећај се преноси са једног делића на суседни и тако напредује кроз еластичну средину. Правац у коме се осциловање преноси назива се правац простирања таласа. При томе се делићи средине који осцилују не премештају заједно са таласом, него и даље осцилују око својих равнотежних положаја. Ако делићи осцилују по правцу дуж кога се простире талас, такав талас се назива лонгитудиналан или уздужан, а ако је осциловање делића око равнотежних положаја нормално на правац простирања таласа, такав талас се назива трансверзалан или попречан талас.

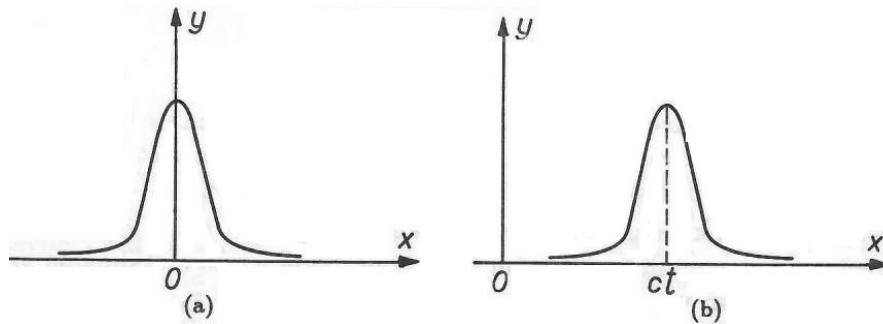
10.2. Таласна једначина

Размотримо случај затегнуте жице у правцу x -осе, дуж које путује један трансверзални импулс. У неком тренутку, рецимо $t = 0$, облик жице може бити престављен једначином:

$$y = f(-x), \quad t = 0 \quad (10.1)$$

где y представља трансферзални поремећај жице на месту $-x$. На слици 10.1а приказан је таласни облик (импулс) на жици у тренутку $t = 0$. Експеримент показује да како време напредује овај импулс путује дуж жице не мењајући свој облик, под условом да су губици енергије услед унутрашњег трења у жици занемарљиви. После неког времена t импулс је прешао пут ct , где је c константна брзина. Једначина таласа у том тренутку постаје:

$$y = f(ct - x), \quad t = t \quad (10.2)$$



Слика 10.1.

Ова једначина даје исти таласни облик у околини тачке $ct = x$ у тренутку t као што је био у околини тачке $x = 0$, у тренутку $t = 0$ (слика 1.10б). Једначина (10.2) је општа једначина која представља померање било каквог таласног облика у позитивном смеру x осе.

Уколико хоћемо да пратимо одређени део (или фазу) таласа у току времена, посматраћемо тај део, његову y вредност (на пример врх импулса). Математички, то значи пратићемо како се x мења са t када $(ct - x)$ има одређену, константну вредност. Види се да са порастом t мора да расте и x да би $(ct - x)$ остало непромењено. Наиме, једначина (10.2) представља талас који путује у позитивном смеру x -осе. Уколико хоћемо да представимо талас који путује у негативном смеру x осе, тада је једначина таласа:

$$y = f(ct + x), \quad (10.3)$$

јер овде положај x неке одређене тачке $(ct + x)$ таласног облика опада са временом. За одређену фазу импулса који путује у позитивном смеру x -осе потребно је да буде

$$ct - x = \text{const}. \quad (10.4)$$

Диференцирањем једначине (10.4) добија се:

$$c - \frac{dx}{dt} = 0, \quad (10.5)$$

односно:

$$c = \frac{dx}{dt}. \quad (10.6)$$

где је c фазна брзина. За талас који путује у негативном смеру x -осе на исти начин се за фазну брзину добија да је $-c$.

Општи облик израза за таласно кретање може даље да се анализира. За сваки фиксирани тренутак t једначина даје y у функцији x . То дефинише криву која преставља облик жице у том тренутку, и даје облик импулса у том тренутку. Уколико хоћемо да

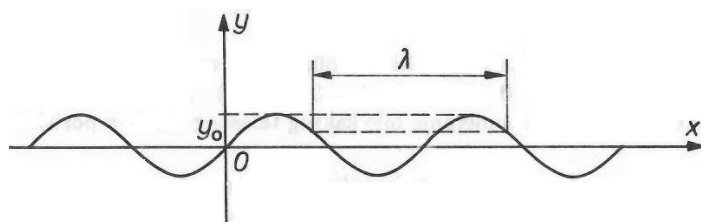
обратимо пажњу на одређену тачку жице на месту x , тада нам једначина даје y у функцији од времена t . Ова веза сада описује како се транзверзални положај жице на месту x мења у току времена t .

Све што је до сада речено важи и за лонгитудиналне таласе, на исти начин као и за трансверзалне таласе. Аналоган пример за лонгитудиналне таласе представља дугачка цев, чија је оса узета у правцу x -осе, а таласни импулс је промена притиска који путује дуж цеви. Истим резонувањем долази се до једначина као што су (10.2) и (10.3), које дају варијацију притиска у времену у свим тачкама цеви.

Најважнији облик таласа је једноставни хармонијски талас, чији је облик описан простом синусном или косинусном функцијом. Сада у има максималну вредност y_0 при равномерним временским интервалима ако фиксирамо x , или при равномерним интервалима x ако фиксирамо време:

$$y = y_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) \right]. \quad (10.7)$$

Облик крије дат једначином (10.7) приказан је на слици 10.2. Максимална вредност (амплитуда) је y_0 . Таласна дужина λ представља растојање између две сусудне тачке које се налазе у истој фази осциловања.



Слика 10.2.

Код таласног кретања дефинишу се величине:

T – период, време једне пуне осцилације, или време потребно да талас пређе пут који одговара таласној дужини, $\lambda = cT$,

f – фреквенција, $f = 1/T$, број осцилација у јединици времена у одређеној тачки,

k – таласни број, $k = 2\pi/\lambda$,

ω - кружна фреквенција, $\omega = 2\pi/T$.

Заменом ових величина у једначину (10.7) добија се:

$$y = y_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\lambda \frac{t}{T} - x \right) \right]. \quad (10.8)$$

Диференцирањем једначине (10.7) прво два пута по времену, а затим два пута по координати x добијају се следеће једначине:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y_0 c \frac{2\pi}{\lambda} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) \right], \quad (10.9)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} c^2 y_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) \right] = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} c^2 y, \quad (10.10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -y_0 \frac{2\pi}{\lambda} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) \right], \quad (10.11)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} y_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) \right] = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} y. \quad (10.12)$$

Из једначина (10.10) и (10.12) следи да је:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (10.13)$$

Једначина (10.13) назива се диференцијална једначина таласног кретања. Анализа различитих проблема таласног кретања много олакшава примена комплексне репрезентације таласне једначине. Пошто хармонијски талас може бити описан синусном или косинусном функцијом, он може бити описан било реалним или имагинарним делом комплексне функције:

$$y = y_0 e^{j(\omega t - kx)} = y_0 [\cos(\omega t - kx) + j \sin(\omega t - kx)]. \quad (10.14)$$

Уколико се једначина (10.14) два пута диференцира по времену и по координати x , добијају се следеће једначине:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y_0 e^{j(\omega t - kx)}, \quad (10.15)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y_0 e^{j(\omega t - kx)}. \quad (10.16)$$

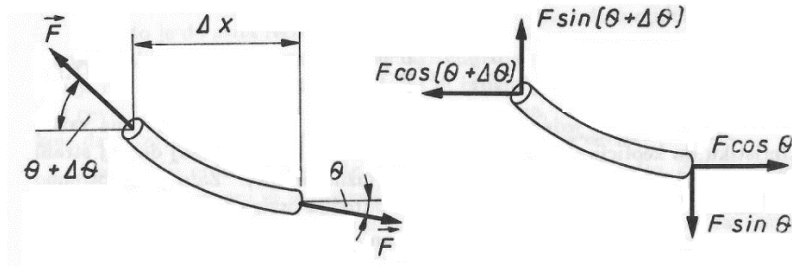
Из једначина (10.15) и (10.16) поново се добија једначина (10.13).

10.2. Брзина простирања трансверзалне деформације у затегнутој жици

Размотримо случај жице затегнуте у x правцу, дуж које путује трансверзални импулс (слика 10.3). Нека је x растојање у правцу простирања импулса, y удаљење честице жице од свог равнотежног положаја (у овом случају нормално на правац x), t је време, μ је маса жице по јединици дужине (подужна маса). Претпоставимо да је импулс мале амплитуде тако да је угао θ мали и померај y је довољно мали да су силе затезања F свуда исте. При малом углу θ може се писати да је:

$$\sin(\theta) \cong \text{tg}(\theta) \cong \frac{dy}{dx}, \quad (10.17)$$

што представља нагиб жице у тачки x .



Слика 10.3.

При малим угловима θ , функције $\cos(\theta)$ и $\cos(\theta + \Delta\theta)$ приближно су једнаке, тако да је хоризонтална компонента резултантне силе на посматраном сегменту једнака нули. Међутим, разлика синуса није занемарљива, па на сегмент делује резултантна вертикална сила F_y :

$$F_y = F \sin(\theta + \Delta\theta) - F \sin(\theta), \quad (10.18)$$

$$F_y = F \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_x \right], \quad (10.19)$$

где је $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нека функција $f(x, t)$. $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x+\Delta x}$ представља нагиб жице на месту $x + \Delta x$, а $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_x$ представља нагиб жице на месту x . Имајући у виду дефиницију другог извода:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_x}{\Delta x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (10.20)$$

једначина (10.19) може се написати у облику:

$$F_y = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x. \quad (10.21)$$

Како је маса ученог сегмента $\mu \Delta x$, применом другог Њутновог закона кретања на вертикалну компоненту добија се:

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (10.22)$$

односно:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (10.23)$$

Упоредивање једначине (10.23) са једначином (10.13) добија се да је:

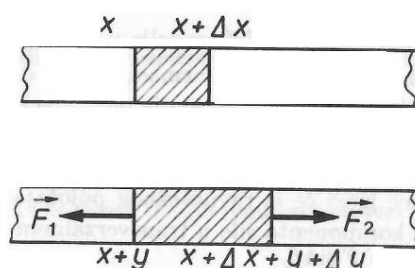
$$c^2 = \frac{F}{\mu}, \quad (10.24)$$

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad (10.25)$$

што представља брзину простирања трансверзалне деформације у затегнутој жици.

10.3. Брзина простирања лонгитудиналних деформације

Ако се чеона површина металне шипке удари чекићем, настаје талас звучних фреквенција. Проблем је врло сличан оном код затегнуте жице, али је овај поремећај мало теже замислити, јер се врши у истом правцу у коме се талас преноси, а не нормално на њега. Нека је у растојање од равнотежног положаја било које честице у шипки на растојању x од дела за који се сматра да је у миру. Онда ћемо размотрити једначину кретања слоја између x и $x + \Delta x$ (слика 10.4).



Слика 10.4.

Када део шипке између x и $x + \Delta x$ буде погођен импулсом, долази до његове деформације под дејством сила F_1 и F_2 на његовим крајевима. Величина силе F_1 зависи од међуатомских растојања на месту x , а силе F_2 зависи од међуатомских растојања на месту $x + \Delta x$. Ове силе се веома мало разликују. Као последица деформације, цео материјал у овом слоју биће напрегнут, па је могуће одредити средњи напон слоја у функцији његове релативне деформације. Средња релативна деформација на месту x је:

$$\delta_x = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (10.26)$$

док је средњи напон на месту x :

$$\sigma_x = E \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (10.27)$$

Напон на месту $x + \Delta x$ је:

$$\sigma_{x+\Delta x} = \sigma_x + \frac{\Delta \sigma_x}{\Delta x} \Delta x. \quad (10.28)$$

Ако је површина попречног пресека S , сила F_1 имаће вредност:

$$F_1 = S \sigma_x = SE \delta_x = SE \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (10.29)$$

За бесконачно мало растојање Δx важи:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (10.30)$$

тако да једначина (10.29) постаје:

$$F_1 = SE \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (10.31)$$

На сличан начин се добија вредност силе на месту $x+\Delta x$ из једначине (10.28):

$$F_2 = S\sigma_{x+\Delta x} = S\sigma_x + S \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta x} \Delta x. \quad (10.32)$$

Промена силе у правцу простирања деформације је:

$$F_2 - F_1 = SE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x. \quad (10.33)$$

На основу другог Њутновог закона на уочени делић тела који лежи у слоју између x и $x+\Delta x$, његова маса је $\rho S\Delta x$, где је ρ густина супстанце тела. Убрзање овог делића тела је:

$$SE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x = \rho S\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (10.34)$$

или:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (10.35)$$

Упоредивање једначине (10.35) са једначином (10.13) добија се да је:

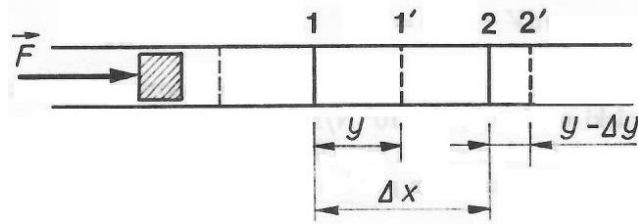
$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (10.36)$$

10.3. Простирање таласа кроз флуиде

Флуиди (течна и гасовита тела) су окарактерисани у погледу њихове еластичности запреминским модулом еластичности E_V . Течности су стишљивији од чврстих тела, иако им густина није много мања, па зато звучни таласи пролазе спорије кроз течности него кроз чврста тела.

Нека се у цилиндру поречног пресека S налази неки флуид (течност или гас), као што је приказано на слици 10.5. На левом крају цеви налази се клип, чијим се наглим померањем за изврстан износ произведе равански, лонгитудинални импулс, који путује слева надесно. При проласку импулса преко слоја дебљине Δx , профил 1 се помери за u удесно у положај 1', а профил 2 се помери за $u-\Delta u$ у положај 2'. При томе се запремина слоја дужине Δx , $V=S\Delta x$, смањује за $\Delta V=-S\Delta u$. Проузрокована запреминска релативна деформација износи:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{S\Delta u}{S\Delta x} = -\frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (10.37)$$



Слика 10.5.

Нека је разлика притисака на крајевима слоја, због које је дошло до ове деформације једнака p , и нека је запремински модуло еластичности E_V . Тада је:

$$p = -E_V \frac{\Delta V}{V} = E_V \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (10.38)$$

односно:

$$p = E_V \frac{dy}{dx}. \quad (10.39)$$

Диференцирањем једначине (10.39) по x добија се:

$$\frac{dp}{dx} = E_V \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (10.40)$$

односно:

$$dp = E_V \frac{d^2 y}{dx^2} dx. \quad (10.41)$$

Резултантна сила која ствара градијент притиска на уоченом слоју је:

$$F = Sdp = E_V S \frac{d^2 y}{dx^2} dx. \quad (10.42)$$

Ова еластична сила уравнотежена је инерцијалном силом слоја. Маса слоја је $m = \rho S dx$, а убрзање је $a = d^2 y / dt^2$. Изједначавањем еластичне и инерцијалне силе добија се:

$$E_V S \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \rho S dx \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad (10.43)$$

или:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{E_V}{\rho} \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (10.44)$$

Упоређивање једначине (10.44) са једначином (10.13) добија се да је:

$$c = \sqrt{\frac{E_V}{\rho}}. \quad (10.45)$$

Код гасова модуло еластичности има две различите вредности у зависности од тога да ли се згушњавање и разређивање при проласку звучног импулса преко слоја Δx одиграва изотермски или адијабатски. У случају изотермског процеса важи Бојл-Мариотов закон $pV = \text{const.}$, одакле се добија:

$$pdV + Vdp = 0. \quad (10.46)$$

Изотермски модуо еластичности је:

$$E_{V_i} = p = -V \frac{dp}{dV}. \quad (10.47)$$

У случају адијабатског процеса је $pV^\chi = \text{const.}$, одакле се добија:

$$V^\chi dp + p\chi V^{\chi-1} dV = 0. \quad (10.48)$$

Адијабатски модуо еластичности је:

$$E_{V_a} = \chi p = -V \frac{dp}{dV}. \quad (10.49)$$

Експерименти показују да се при проласку таласа гас загрева, одакле се закључује да је промена адијабатска, па је брзина простирања звука кроз гасове:

$$c = \sqrt{\frac{p\chi}{\rho}}. \quad (10.50)$$

Претпоставимо да се кроз гас преноси синусни, равански, лонгитудинални талас, чија деформација у пресеку 1 има облик простопериодичне таласне функције:

$$y = y_o \sin(\omega t - kx). \quad (10.51)$$

Диференцирајући једначину (10.51) по x добија се:

$$\frac{dy}{dx} = -k \cos(\omega t - kx), \quad (10.52)$$

и уносећи овај израз у једначину (10.39) добија се израз за простопериодичну варијацију притиска у пресеку цеви 1:

$$p = E_V k y_o \cos(\omega t - kx) = E_V \frac{\omega}{c} y_o \cos(\omega t - kx) = \rho c^2 \frac{\omega}{c} y_o \cos(\omega t - kx). \quad (10.53)$$

Једначина (10.53) може се написати у облику:

$$p = p_o \cos(\omega t - kx), \quad (10.54)$$

где је $p_o = \rho c \omega y_o$. Види се да p_o зависи од врсте материјала (ρ и c) и од величина y_o и ω .

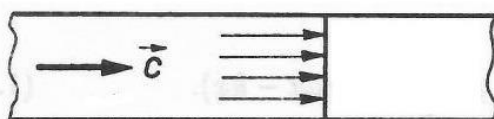
10.4. Преношење енергије прогресивним таласом

У некој средини постоји таласни извор и од њега се шири на све стране. Уочимо било коју тачку у тој средини. Она је била у миру (не узимајући у обзир њено термичко кретање), и према томе није имало енергију. Када талас стигне до ње, она почиње да се креће (осцилује), што значи да је добила изванредан износ енергије, и наставља да осцилује са истим износом енергије (под претпоставком да нема дисипације). Талас се простира даље и преноси енергију удаљеним тачкама те средине. Дакле, у процесу таласног кретања јавља се струјање енергије од извора таласног кретања ка удаљеним тачкама.

Енергија која прође кроз један уочени пресек у јединици времена је снага таласног кретања.

Посматрајмо струјање енергије у једној еластичној средини лонгитудиналног раванског таласа. Уочимо један пресек у том телу (слика 10.6). Када талас стигне до уоченог пресека, честице у њему почињу да се крећу јер је са леве стране пресека повећан притисак. Сила која делује са леве стране пресека је $F = pS$, где је S површина попречног пресека. Извршени рад dA у јединици времена при померању пресека је снага P :

$$P = \frac{dA}{dt} = F \frac{dy}{dt} = Fv = pSv. \quad (10.55)$$

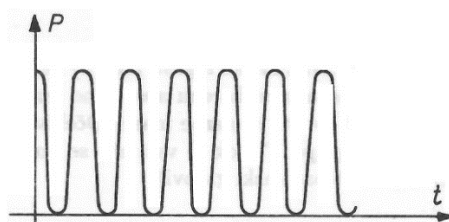


Слика 10.6.

Једначина (10.55) представља протеклу количину енергије у јединици времена. Уколико се у једначину (10.55) уврсти израз за брзину, једначина (10.9), и притисак p , једначина (10.54), добија се:

$$P = Sp_0 v_0 \cos^2(\omega t - kx). \quad (10.56)$$

Како је $\cos^2(\omega t - kx) > 0$, види се да енергија струји у смеру простирања таласа и не враћа се назад. Енергија не струји континуално, већ у импулсима пошто се $\cos^2(\omega t - kx)$ мења од 0 до 1. То се сликовито може показати да један одређен пресек ($x = \text{const.}$) на дијаграму, где је апциса време t , а ордината функција $P(t)$, слика 10.7.



Слика 10.7.

За простирање енергије таласног кретања карактеристична је средња снага. Снага није константна јер извор који одаје снагу осцилује. Енергија се преноси кроз средину и у сваком елементу средине се задржава као кинетичка енергија кретања и потенцијална енергија деформације. Средња снага у току једног периода T је:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P dt = Sp_0 v_0 \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t - kx) dt. \quad (10.57)$$

Вредност интеграла је $T/2$ и средња стага је:

$$\bar{P} = \frac{sp_0v_0}{2}. \quad (10.58)$$

Како је:

$$v_0 = \omega y_0 = \frac{p_0}{\rho c}, \quad (10.59)$$

једначина (10.58) може се написати у облику:

$$\bar{P} = \frac{sp_0^2}{2\rho c}. \quad (10.60)$$

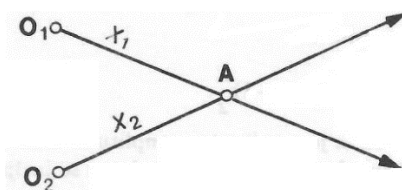
У једначинама (10.59) и (10.60) фигурише израз ρc , који се назива акустична отпорност.

10.5. Интерференција прогресивних таласа

Интерференција је појава која се односи на физичке ефекте који се одвијају при узајамном међудејству два или више прогресивна таласа. Ако два извора O_1 и O_2 таласног кретања (слика 10.8) емитују таласе у простору, у свакој тачки те средине стичу се два таласа. Стање у били којој тачки A која се налази на растојању x_1 и x_2 од извора O_1 и O_2 приказана је збиром двеју таласних функција y_1 и y_2 . У општем случају ова два таласа имају различите амплитуде, кружне фреквенције, фазне разлике и не осцилују синхроно:

$$y_1 = y_{10} \sin(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1), \quad (10.61)$$

$$y_2 = y_{20} \sin(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2). \quad (10.62)$$

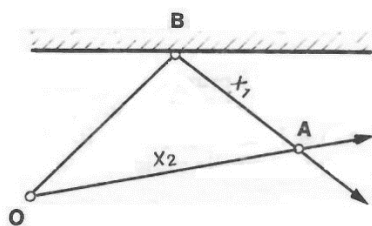


Слика 10.8.

Међутим, често се дешава да су амплитуде и кружне фреквенције исте и тада су извори синхрони. Такав је случај када два зрака из истог таласног извора, крећући се различитим путевима, због рефлексије у тачки B (слика 10.9) стижу у тачку A. Таласне функције ова два таласа у тачки A могу се написати као:

$$y_1 = y_0 \sin(\omega t - kx_1), \quad (10.63)$$

$$y_2 = y_0 \sin(\omega t - kx_2). \quad (10.64)$$



Слика 10.9.

Стање у тачки А приказано је збиром ове две функције:

$$y = y_1 + y_2 = y_0 [\sin(\omega t - kx_1) + \sin(\omega t - kx_2)]. \quad (10.65)$$

На основу познате тригонометријске трансформације:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \quad (10.66)$$

једначина (10.65) постаје:

$$y = 2y_0 \cos\left(\omega \frac{x_2 - x_1}{2c}\right) \sin\left[\omega \left(t - \frac{x_1 + x_2}{2c}\right)\right]. \quad (10.67)$$

Резултантни талас има исту фреквенцију:

$$y = A \sin\left(\omega t - k \frac{x_1 + x_2}{2}\right), \quad (10.68)$$

где је:

$$A = 2y_0 \cos\left(k \frac{x_2 - x_1}{2}\right). \quad (10.69)$$

амплитуда као функција независна од времена, са вредношћу $0 \leq A \leq 2y_0$. Ако је вредност резултантне амплитуде нула, онда се ова два таласа поништавају. То се дешава када је:

$$\omega \frac{x_2 - x_1}{2c} = (2z + 1) \frac{\pi}{2}, \quad z = 1, 2, 3, \dots \quad (10.70)$$

Тада је разлика пређених путева:

$$\delta = x_2 - x_1 = (2z + 1) \frac{\pi 2c}{2\omega} = (2z + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (10.71)$$

Ако је косинусна функција једнака јединици, онда је резултантна амплитуда максимална $2y_0$. Овај случај се јавља када је:

$$\omega \frac{x_2 - x_1}{2c} = z\pi, \quad z = 1, 2, 3, \dots \quad (10.72)$$

Разлика пређених путева у овом случају је:

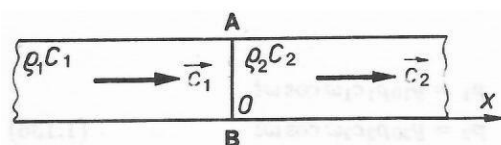
$$\delta = x_2 - x_1 = z \frac{2c\pi}{\omega} = z\lambda. \quad (10.73)$$

Интерференција прогресивних таласа се манифестује поништавањем или појачавањем таласних кретања. Из синусног члана резултантне таласне функције дате једначином (10.67) види се да резултантна таласна функција у зависи од две промењиве,

временске и просторне. Дакле, кроз средину се простире резултујуће таласно кретање чије тачке осцилују са фазном разликом.

10.6. Одбијање таласа

Посматрајмо одбијање таласа на примеру лонгитудиналног раванског таласа, при нормалном упаду на површину која раздваја две средине (слика 10.10). Нека се равански талас простире кроз бесконачно дугу цев слева удесно. Цев је испуњена са две различите средине, раздвојене пресеком АВ. Са леве стране пресека АВ је средина акустичне отпорности $\rho_1 c_1$, а са друге стране $\rho_2 c_2$.



Слика 10.10.

Поставимо координатни почетак у пресеку АВ. Талас долази са леве стране пресека и његова функција је:

$$y_1 = y_{10} \sin(\omega t - k_1 x), \quad (10.74)$$

а таласна функција са десне стране пресека је:

$$y_2 = y_{20} \sin(\omega t - k_2 x). \quad (10.75)$$

Притисци са леве и десне стране пресека су респективно:

$$p_1 = -E_1 \frac{dy_1}{dx} = y_{10} \rho_1 c_1 \omega \cos(\omega t - k_1 x), \quad (10.76)$$

$$p_2 = -E_2 \frac{dy_2}{dx} = y_{20} \rho_2 c_2 \omega \cos(\omega t - k_2 x), \quad (10.77)$$

Како се посматра пресек постављен у координатни почетак, биће:

$$y_1 = y_{10} \sin(\omega t), \quad p_1 = y_{10} \rho_1 c_1 \omega \cos(\omega t), \quad (10.78)$$

$$y_2 = y_{20} \sin(\omega t), \quad p_2 = y_{20} \rho_2 c_2 \omega \cos(\omega t), \quad (10.79)$$

Померање пресека АВ је јединствено, тј. мора бити испуњен услов $y_1 = y_2$. Такође и притисци са једне и друге стране пресека морају бити исти $p_1 = p_2$. Из првог услова следи да је $y_{10} = y_{20}$, а из другог услова следи да је $y_{10} \rho_1 c_1 = y_{20} \rho_2 c_2$. Како су са леве и десне стране различите средине, тј. $\rho_1 c_1 \neq \rho_2 c_2$, очигледно је да ова два услова не могу бити испуњена. Стога закључујемо да мора постојати и трећи талас који се простире кроз средину са леве стране пресека АВ. Он је настао баш у том пресеку, тј.

пресек АВ се понаша као извор трећег таласа, односно на том месту се талас рефлектује. Овај трећи талас се простире у средини са леве стране пресека, истом брзином као и долазећи талас, али у супротном смеру, $c_3 = -c_1$. Ова три таласа могу се приказати помоћу следећих таласних једначина:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{10} \sin(\omega t - k_1 x), \\ y_2 &= y_{20} \sin(\omega t - k_2 x), \\ y_3 &= y_{30} \sin(\omega t + k_1 x). \end{aligned} \quad (10.80)$$

Одговарајући притисци су:

$$\begin{aligned} p_1 &= -E_1 \frac{dy_1}{dx} = y_{10} \rho_1 c_1 \omega \cos(\omega t - k_1 x), \\ p_2 &= -E_2 \frac{dy_2}{dx} = y_{20} \rho_2 c_2 \omega \cos(\omega t - k_2 x), \\ p_3 &= -E_1 \frac{dy_3}{dx} = y_{30} \rho_1 c_1 \omega \cos(\omega t + k_1 x). \end{aligned} \quad (10.81)$$

У пресеку АВ, за $x = 0$, биће:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{10} \sin(\omega t), & p_1 &= y_{10} \rho_1 c_1 \omega \cos(\omega t), \\ y_2 &= y_{20} \sin(\omega t), & p_2 &= y_{20} \rho_2 c_2 \omega \cos(\omega t), \\ y_3 &= -y_{30} \sin(\omega t), & p_3 &= -y_{30} \rho_1 c_1 \omega \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (10.82)$$

Сада је могуће поставити услове да је померај пресека АВ јединствен, и да су притисци са леве и десне стране пресека исти:

$$y_1 + y_3 = y_2, \quad p_1 + p_3 = p_2, \quad (10.83)$$

одакле следи да је:

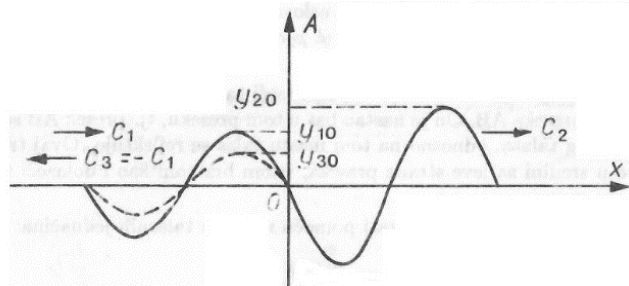
$$y_{10} + y_{30} = y_{20} \quad y_{10} \rho_1 c_1 \omega - y_{30} \rho_1 c_1 \omega = y_{20} \rho_2 c_2 \omega, \quad (10.84)$$

Из једначина (10.83) и (10.84) добија се да је:

$$y_{30} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} y_{10}, \quad (10.85)$$

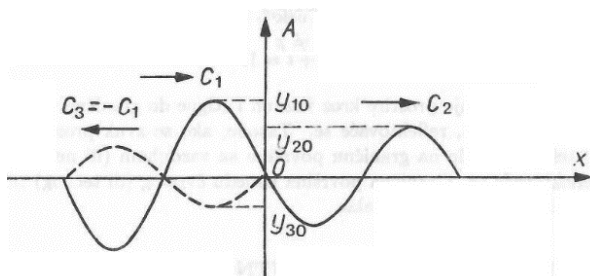
$$y_{20} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} y_{10}, \quad (10.86)$$

Из ових решења се види да је за $\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$, амплитуда y_{30} је истог знака као и амплитуда y_{10} , а амплитуда y_{20} једнака је збиру ове две амплитуде (слика 10.11).



Слика 10.11.

Ако је међутим $\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$, амплитуда y_{30} је супротног знака од амплитуде y_{10} , а амплитуда y_{20} једнака је разлици ове две амплитуде (слика 10.12).



Слика 10.12.

У првом случају кажемо да се талас одбија без промене фазе, а у другом случају при рефлексији мења фазу за π . Према томе, рефлексија таласа наступа увек на граничној површини која раздваја две средине различитих акустичних отпорности, било да је $\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$ или $\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$.

У приказаној анализи нису узете у обзир вискозне силе, сматра се да је апсорпција занемарљива, па се израчунава коефицијент рефлексије и трансмисије. Коефицијент рефлексије r је количник интензитета рефлектованог таласа I_3 и упадног таласа I_1 :

$$r = \frac{I_3}{I_1}, \quad (10.87)$$

а коефицијент трансмисије t је количник интензитета пропуштеног (трансмитованог) таласа I_2 и упадног (инцидентног) таласа I_1 :

$$t = \frac{I_2}{I_1}, \quad (10.88)$$

Интензитети таласних кретања инцидентног таласа I_1 , трансмитованог таласа I_2 и рефлектованог таласа I_3 дати су изразима:

$$I_1 = \frac{1}{2} y_{10}^2 \rho_1 c_1 \omega^2, \quad (10.89)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} y_{20}^2 \rho_2 c_2 \omega^2, \quad (10.90)$$

$$I_3 = \frac{1}{2} y_{30}^2 \rho_1 c_1 \omega^2. \quad (10.91)$$

Из претходних једначина следи да је:

$$r = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \right)^2, \quad (10.92)$$

$$t = \frac{4 \rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}. \quad (10.93)$$

Из ових једначина се види да коефицијент рефлексије зависи од акустичне отпорности обе средине. Ако су акустичке отпорности две средине блиске вредности,

коэффициент рефлексије је мали и таласно кретање лако пролази из једне средине у другу. На пример, ако је једна средина течност, а друга чврсто тело, таласно кретање лако пролази из једне средине у другу. За такве граничне површине може се рећи да су “провидне” за еластичне таласе.

Међутим, гасови имају мале акустичне отпорности у односу на вредности акустичних отпорности чврстих и течних тела. Тада је коэффициент рефлексије велики ($r \cong 1$), односно коэффициент трансмисије мали. Наиме, из једначина (10.92) и (10.93) се види да је:

$$r + t = 1. \quad (10.94)$$

Ако се таласно кретање простире кроз ваздух и стигне до граничне површине са чврстим или течним телом, рефлектоваће се. Такођем ако се звук простире кроз чврсто или течно тело, па наиђе на граничну површину са ваздухом, рефлектоваће се. Гранична површина између чврстог или течног тела и гасова је “непровидна” за механичке таласе.

10.7. Интерференција инцидентног и рефлектованог таласа

При простирању таласног кретања често се јавља случај када је $\rho_1 c_1 \gg \rho_2 c_2$. Тада је амплитуда рефлектованог таласа једнака амплитуди инцидентног таласа. То се дешава при простирању таласа кроз металну шипку. Талас се на крају шипке рефлектује и враћа назад без промене фазе и са истом амплитудом $y_{10} = y_{30}$.

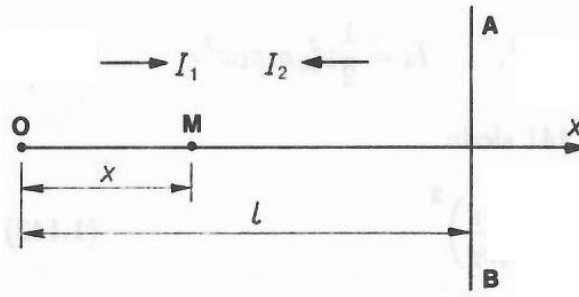
Међутим, дешава се да је $\rho_1 c_1 \ll \rho_2 c_2$. Тада се талас рефлектује у потпуности од граничне површине, дакле са истом амплитудом по модулу, али са промењеном фазом за π , тј. $y_{10} = -y_{30}$. Такав случај се дешава при рефлексији таласа од металног дна цеви, јер је акустичка отпорност метала много већа одакустичке отпорности ваздуха.

У оба случаја доћи ће до интерференције инцидентног и рефлектованог таласа, која може довести до појаве стојећег таласа. Појаву стојећег таласа можемо приказати на примеру линијског таласа или, што је исто, на примеру раванских таласа, било лонгитудиналних или трансверзалних. Поставимо координатни почетак у место извора таласа O и уочимо тачку M материјалне средине удаљене x од извора (слика 10.13). У тачку M стиже инцидентни талас чија је таласна функција;

$$y_1 = y_0 \sin(\omega t - kx). \quad (10.95)$$

У тачку M стиже и талас који је отишао до граничне површине AB и рефлектовао се од ње. Његова таласна функција је:

$$y_3 = y_0 \sin[\omega t - k(2l - x)] = y_0 \sin(\omega t - k2l + kx). \quad (10.96)$$



Слика 10.13.

Ако средњи члан аргумента функције (10.96) има вредност $(2z+1)\pi$ или $z2\pi$, где је $z = 0,1,2,3,\dots$, може се изоставити зато што је $\sin(\varphi - \pi) = \sin(\varphi)$ и $\sin(\varphi - 2\pi) = \sin(\varphi)$. Овај случај наступа када је:

$$\omega \frac{2l}{c} = (2z + 1)\pi, \text{ односно: } l = (2z + 1) \frac{\pi c}{2\omega} = (2z + 1) \frac{\lambda}{4}. \quad (10.97)$$

или ако је:

$$\omega \frac{2l}{c} = z2\pi, \text{ односно: } l = z \frac{2\pi c}{2\omega} = z \frac{\lambda}{2}. \quad (10.98)$$

Тада кажемо да је дужина шипке резонантна. Када је испуњен један од претходна два услова функција (10.96) има облик:

$$y_3 = y_0 \sin(\omega t + kx). \quad (10.99)$$

Сабирањем функција (10.95) и (10.99) добија се функција y која приказује резултујуће стање у тачки M :

$$y = y_1 + y_3 = y_0 \sin(\omega t - kx) + y_0 \sin(\omega t + kx) = 2y_0 \cos(kx) \sin(\omega t). \quad (10.100)$$

Из једначине (10.100) може се закључити да функција $A = 2y_0 \cos(kx)$ не садржи време t и може се сматрати резултантном амплитудом функције y и има вредност у интервалу $0 \leq A \leq 2y_0$. У тачкама где је $\cos(kx) = 0$ ова два таласа су поништена. Те тачке називамо чворовима. Њихове координате налазе се из услова:

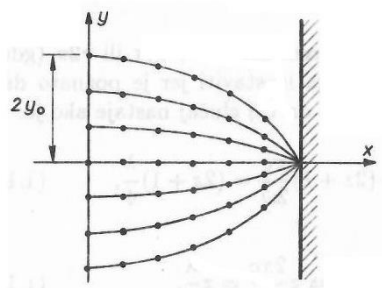
$$kx_c = (2z + 1) \frac{\pi}{2}, \text{ односно: } x_c = (2z + 1) \frac{\pi c}{2\omega} = (2z + 1) \frac{\lambda}{4}. \quad (10.101)$$

У тачкама где је $\cos(kx) = 1$ биће максимална амплитуда $2y_0$. Те тачке називамо трбусима. Њихове координате налазе се из услова:

$$kx_c = z\pi, \text{ односно: } x_c = z \frac{\pi c}{\omega} = z \frac{\lambda}{2}. \quad (10.102)$$

Растојање између два суседна чвора или два суседна трбуха је $\lambda/2$, а растојање између суседних трбуха и чвора $\lambda/4$. Из услова о резонантној дужини се види да ће се стојећи талас јавити онда када се на крају тела јави чвор или трбух.

Из синусног члана резултантне функције стојећег таласа, дат једначином (10.100), види се је аргумент једнак ωt и да у аргументу не функционише координата x . Овим се стојећи талас битно разликује од прогресивних таласа. Све тачке те средине синхронно (једновремено) осцилују. То значи да средина осцилује као целина. Суперпозицијом два таласа у једном телу долази до стојећег таласа, па се тело манифестује као осцилатор. Сликровитио се ово може видети на примеру линијског трансверзалног стојећег таласа таласа (слика 10.14). У тренутку $t = 0$ све тачке се налазе у свом равнотежном положају. Распоред тачака је праволинијски. Оне се истовремено крећу и у тренутку $t = T/4$ све се налазе у својим амплитудама, па је распоред тачака дат функцијом $2y_0 \cos(kx)$. Затим све тачке крећу наниже, тако да се у тренутку $t = T/2$ поново налазе на правој линији. Тако процес тече даље и кажемо да је успостављен стојећи талас.



Слика 10.14.

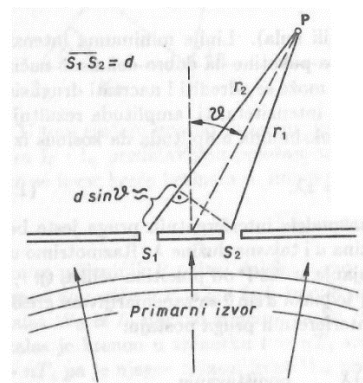
10.8. Дифракција

Дифракција се јавља код свих прогресивних таласа када поворка таласа наиђе на одређене препреке, заклоне или отворе. Уколико до тога дође, таласи се простиру не само у правцима одређени законима одбијања и преламања, него одступају у мањој или већој мери од тих праваца. Појава дифракције постаје изразита уколико геометријске димензије препреке (заклона или отвора) нису знатно веће од таласне дужине λ .

Хајгенсов принцип се заснива на претпоставци да свака тачка коју погоди таласни фронт постаје извор новог сферног секундарног таласа, истих особина као што је био и примарни талас. Овај принцип се у свом првобитном облику односио на геометријску оптику, у случајевима када се таласна дужина могла сматрати бесконачно

малом у поређењу са димензијама таласног фронта. Због тога је овај принцип омогућавао да се реше само задаци о правцу простирања светлосног фронта и није залазио у проблеме интензитета таласа који се крећу у разним правцима. Тај недостатак је решио Френел, који је Хајгенсовом принципу дао физички смисао, допунивши га идејом о интерференцији таласа. Завхаљујући томе, одвојна површина елементарних таласа, коју је Хајгенс увео само формално, добила јасан физички смисао, као површина на којој због узајамне интерференције елементарних таласа резултујући талас има знатан интензитет.

Размотримо шта се догађа када један прогресивни талас наиђе на препреку. Према Хајгенсовом принципу, свака тачка коју погоди упадни талас понаша се као извор новог таласа, поремећај који се шири иза препреке последица је суперпозиције таласа који се шире од ових секундарних извора. Пошто су секундарни таласи последица истог примарног таласа, међу њима је добро дефинисана фазна зависност. Овакви таласи се називају кохерентни и за њих је могуће одредити фазну разлику када стигну до било које удаљене тачке. Последица кохерентности секундарних таласа јесте појава интерферентних облика са супротне стране препреке.



Слика 10.15.

Једноставан случај јесте онај када препрека потпуно спречава пролаз примарног таласа, осим кроз две врло блиске мале пукотине. У дводимензионалном систему оне се понашају као тачкасти извори. На слици 10.15 приказан је таласни фронт који се приближава двема пукотинама S_1 и S_2 , за које се узима да су врло блиске, узане и једнаке. Нека су ове пукотине подједнако удаљене од примарног таласног извора. Онда се секундарни извори S_1 и S_2 у фази један са другим. Ако је примарни талас прост хармонијски поремећај, секундарни извор ће такође генерисати просте хармонијске таласе. У произвољној тачки P поремећај ће бити резултат сабирања поремећаја који у истом тренутку стижу од оба секундарна таласа. Нека су растојања r_1 и r_2 много већа од

растојања d између пукотина. Због тога ће разлика амплитуда једног и другог таласа у тачки P бити занемарљива. Остаје још могућност фазне разлике ова два таласа у тачки P и у томе лежи узрок варијације интензитета резултујућег таласа. У одређеним тачкама резултујући талас увек ће имати скоро вредност нула, док ће у неким другим тачкама увек имати максималну амплитуду. У тачки P стање ће бити приказано збиром таласних функција таласа који потичу из S_1 и S_2 . Узимајући да је $y_{10} = y_{20} = y_0$ следи:

$$y_P = y_0 [\sin(\omega t - kr_1) + \sin(\omega t - kr_2)], \quad (10.103)$$

одакле се добија резултантна таласна функција као што је једначина (10.67). Њена амплитуда A има облик:

$$A = 2y_0 \cos\left(\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right). \quad (10.104)$$

Амплитуда A биће једнака нули када је величина $\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$ једнака непарном умношку од $\pi/2$:

$$\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = (2z + 1) \frac{\pi}{2}, \text{ односно: } r_2 - r_1 = \left(z + \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad (10.105)$$

где је z позитиван или негативан цео број (или нула). Услов за постизање максимума амплитуде је да косинус из једначине (10.104) буде једнак јединици:

$$r_2 - r_1 = z\lambda. \quad (10.106)$$

Важан параметар који одређује изглед расподеле интерферентних пруга јесте бездимензионални однос растојања између пукотина d и таласне дужине λ . Размотримо услов да су растојања тачке P од пукотина велика ($r \gg d$). Тада се може ставити да је разлика $r_2 - r_1$ једнака $d \sin(\theta)$, тако да услови за минимум и максимум интерферентних пруга постају:

$$d \sin(\theta_z) = \begin{cases} \left(z + \frac{1}{2}\right) \lambda & \text{поништавање} \\ z\lambda & \text{појачање,} \end{cases} \quad (10.107)$$

а амплитуда у произвољном правцу је одређена изразом:

$$A = 2y_0 \cos\left(\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda}\right). \quad (10.108)$$

10.8. Доплеров ефекат

Ако се извор периодичног таласног кретања креће у односу на средину, мења се слика таласа који се у средини ствара. Најједноставнији случај представља праволинијско кретање извора константном брзином. На слици 10.16 приказан је звучни

извор I и пријемник P , који му се приближава брзином v . Кругови представљају таласне фронтове размакнути за једну таласну дужину, који путује кроз еластичну средину. Када би пријемник мировао, до њега би стизало ct/λ таласа у току времена t (c је брзина простирања таласног кретања). Због његовог кретања према извору, до пријемника стиже vt/λ додатних таласа у току истог временског интервала t . Фреквенција коју региструје пријемник једнака је броју таласа у јединици времена:

$$f = \frac{\frac{ct}{\lambda} + \frac{vt}{\lambda}}{t} = \frac{c+v}{\lambda} = \frac{c+v}{c} f_0, \quad (10.109)$$

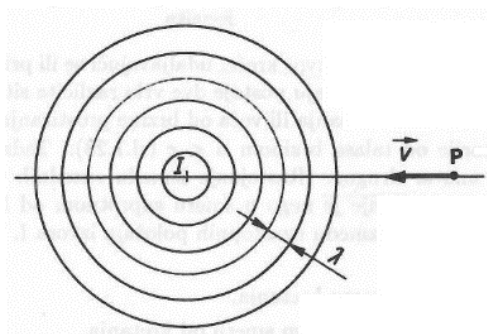
где је $f_0 = \frac{c}{\lambda}$ фреквенција коју би примио пријемник када би био непокретан. Када се пријемник удаљава од непокретног извора, долази до смањења броја таласа који стижу у току времена t до пријемника, што доводи до смањења фреквенције коју прима пријемник:

$$f = \frac{c-v}{c} f_0. \quad (10.110)$$

Општи израз који важи када је извор непокретан у односу на средину, а пријемник се креће је:

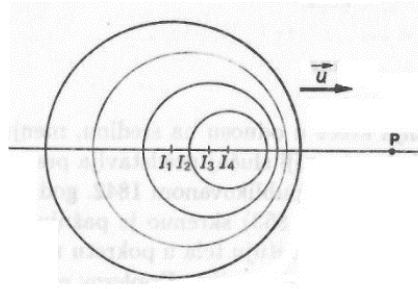
$$f = \frac{c \pm v}{c} f_0, \quad (10.111)$$

где се позитиван знак примењује када се пријемник приближава извору, а негативан када се удаљава од њега. Ово представља Доплеров ефекат. Узрок промене фреквенције је чињеница да до пријемника стиже већи или мањи број таласа у јединици времена због кретања пријемника.



Слика 10.16.

Друга могућност кретања јесте када се извор креће, удаљавајући се или приближавајући се, а пријемник мирује. У овом случају постоје две врло различите ситуације у зависности од тога да ли је брзина извора мања или већа од брзине простирања таласа. Нека се извор креће спорије од таласа брзином $u < c$. (слика 10.17).



Слика 10.17.

Тада кружни таласни фронтови леже један унутар другог. Растојање између суседних таласних фронтова у смеру кретања извора мање је него у смеру супротном од кретања извора. Нека је T временски интервал између узастопних положаја извора I . Тада су размаци између таласних фронтова:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (c - u)T && \text{у смеру кретања,} \\ \lambda_2 &= (c + u)T && \text{у супротном смеру од кретања,} \\ \lambda_0 &= cT && \text{ако извор мирује.} \end{aligned} \quad (10.112)$$

Тако постоји систематска варијација таласне дужине са смером простирања таласа из покретног извора, што такође представља Доплеров ефекат.

Из израза (10.112) за минималну и максималну таласну дужину добија се:

$$\lambda_{min} = \left(1 - \frac{u}{c}\right) cT = \frac{c-u}{c} \lambda_0, \quad (10.113)$$

$$\lambda_{max} = \left(1 + \frac{u}{c}\right) cT = \frac{c+u}{c} \lambda_0. \quad (10.114)$$

односно за фреквенцију: $f = \frac{c}{c-u} f_0$ и $f = \frac{c}{c+u} f_0$. Једначине за фреквенцију се могу написати у општем облику:

$$f = \frac{c}{c \pm u} f_0, \quad (10.115)$$

где се знак минус узима када се извор приближава пријемнику, а знак плус када се удаљава од пријемника.

Једначине (10.111) и (10.115) могу се објединити, тако да се на тај начин узме у обзир и једновремено кретање и извора и пријемнике:

$$f = \frac{c \pm v}{c \pm u} f_0, \quad (10.116)$$

где је f_0 фреквенција таласног кретања коју емитује извор, v је брзина кретања пријемника, u брзина кретања извора. Знаци се узимају у бројиоцу плус за приближавање, а минус за удаљавање, док се у имениоцу минус узима за приближавање, а плус за удаљавање.