1. УВОД

1.1. Физика и инжењерство

Физика је једна од најосновнијих научних дисциплина, а њен главни циљ је да разуме како се универзум понаша. Физика генерише основна знања потребна за будући технолошки напредак. Физика се заснива на експерименталним запажањима и квантитативним мерењима. Главни циљеви физике су да идентификује ограничен број основних закона који управљају природним феноменима и да их користи за развој теорије које могу предвидети резултате будућих експеримената. Основни закони који се користе у развоју теорија изражени су језиком математике, као алат који обезбеђује мост између теорије и експеримента.

Физички концепти, као што су класична механика, термодинамика и статистичка механика, електромагнетизам, квантна механика, атомска физика, молекуларна физика, оптика, физика кондензоване материје, нуклеарна физика, физика елементарних честица, космологија, астрофизика итд., играју виталну улогу у процесу иновација, што је кључно у развој инжењерских грана. Инжењерство је у основи физика примењена да би се створило нешто практичније. То може бити механичко, електрично, грађевинско, итд., али сви су у основи вођени физиком. Немогуће је решити сложене инжењерске проблеме без разумевања физике која стоји иза тога. Међутим, разлика између примењене физике и инжењерства је у томе што се инжењери много више баве тиме како се научна теорија, уређај или технологија могу користити.

У грађевинарству, закони физике вам могу рећи о силама, хармонијским вибрацијама и осцилацијама, затезној чврстоћи, еластичности и свим врстама других концепата које можете користити за прорачуне у вези са пројектантским и грађевинским радовима.

За сваки предмет машинског инжењерства потребна вам је помоћ физике у бављењу авионима, чамцима, моторима, роботиком, оружјем, аутомобилима, пнеуматиком, хидрауликом и другим коришћењем основних области укључујући механику, динамику, термодинамику, науку о материјалима, структурну анализу, и струју.

Електротехника укључује пројектовање електричних кола укључујући моторе, електронске уређаје, мреже са оптичким влакнима, рачунаре и комуникационе везе. Инжењери електротехнике често морају да претворе електричну енергију у друге облике енергије, уз разумевање механике и термодинамике. Познавајући основе електротехнике, поред тога како мале компоненте попут интегрисаних кола и разних типова транзисторске логике, све функције захтевају барем средње разумевање електромагнетизма, које учите из физике.

За шумарство и пољопривреду, радиоактивни изотопи као извори радиоактивног зрачења, су веома значајни као средство за повећање приноса и оплемењивање биљака, чувања пољопривредних производа, као средство против штетних инсеката итд.

1.2. Међународни систем јединица (SI)

1.2.1. Физичке величине и јединице

Физичке величине, које се означавају косим словима (A), служе за квантитативно описивање физичких појава и физичких стања. Конкретне вредности физичких величина изражавају се производом нумеричке вредности и мерне јединице (она је увек скалар, без обзира на карактер физичке величине, као општег појма). Према томе, мерење је поступак упоређивања физичке величине са величином усвојеном за њену јединицу.

Физичке величине које се могу међусобно упоређивати образују скуп истородних физичких величина (на пример: дужина, пречник, растојање, таласна дужина итд.).

Мерна јединица физичке величине A је договором утврђена, посебно именована конкретна вредност за сваки скуп истородних физичких величина и означава се са [A]. Ако за један скуп истородних величина дефинишемо више различитих јединица, међусобне везе ових јединица изражавају се факторима прорачунавања јединица, тзв. јединичним факторима (они су увек посебни бројеви, на пример $\mathrm{k} = \frac{\mathrm{min}}{\mathrm{s}} = 60$).

Нумеричка вредност физичке величине A је рационални број $\{\mathrm{A}\}$. Нумеричка вредност мерне јединице је 1. Конкретна вредност физичке величине независна је од избора мерне јединице:

$$A = \{\mathrm{A}\}[\mathrm{A}]. \tag{1.1}$$

Ако уместо мерне јединице [A] узмемо мерну јединицу [A]’ = k[A], где је k јединични фактор, односно фактор прерачунавања јединица, тада из:

$$A = \{\mathrm{A}\}[\mathrm{A}] = \{\mathrm{A}\}'[\mathrm{A}]' \tag{1.2}$$

следи да је:

$$\{A\}' = \frac{1}{k}\{A\}. \quad (1.3)$$

Пример:

$t = 240 \text{ s} = \frac{240}{60} \text{ min} = 4 \text{ min}$

$\{t\}_s = 240$, $\{t\}_{min} = 4$

Види се да су физичка величина, нумеричка вредност и одговарајућа мерна јединица различити појмови, па је и прописан различит начин обележавања. Ознака нумеричке вредности треба да садржи и ознаку мерне јединице, при чему се нумеричке вредности (које одговарају одређеној мерној јединици) означавају на два начина:

a) $\{t\}_s$, $\{t\}_{min}$ (витичаста заграда и у њој косо слово које означава физичку величину, док индекс означава мерну јединицу).
b) $\frac{t}{s}$, t / s, $\frac{t}{\text{min}}$, t / min (разломком са ознаком физичке величине у бројитељу и ознаком мерне јединице у именитељу).

"Бездимензионе" величине изражавају се само нумеричким вредностима (њихова мерна јединица је број 1). Иако ове величине имају неке особине физичког карактера (служе за квантитативно описивање физичких појава и физичких стања), оне по својој суштини не представљају физичке, већ чисто математичке величине. Пример ових величина су:

a) величине дефинисане односом двеју истородних физичких величина (или логаритмом) као што су степен, експонент, индекс, фактор, ниво итд.
b) параметри сличности (комбинације производа и количника разнородних физичких величина којима се мерна јединица своди на број 1)

Пример бездимензионе величине је Рејнолдсов број $R_e = \frac{\bar{v}d}{\nu}$, где су: $\bar{v}$ – средња брзина делића флуида, d – карактеристична дужина (дужина цеви кроз коју протиче флуид), ν – коефицијент кинематске вискозности.

Математичке операције са физичким величинама

Истородне физичке величине могу се међусобно сабирати и одузимати по законима алгебре:

$$A_1 \pm A_2 = \{A_1\}[A_1] \pm \{A_2\}[A_2] = \{A_3\}[A_3], \quad (1.4)$$

где су:

$[A_1] = [A_2] = [A_3]$,

$\{A_3\} = \{A_1\} \pm \{A_2\}$.

Из једначине (1.4) следи да је нумеричка вредност физичке јединице једнака збиру (разлици) нумеричких вредности.

Физичке величине могу се међусобно множити и делити по законима алгебре и резултат је нова физичка величина.

Производ две физичке величине A и B је:

$$AB = \{A\}[A]\{B\}[B] = \{C\}[C], \tag{1.5}$$

где су:

$\{C\} = \{A\}\{B\}$,

$[C] = [A][B]$.

Количник две физичке величине A и B је:

$$\frac{A}{B} = \frac{\{A\}}{\{B\}}\frac{[A]}{[B]} = \{D\}[D], \tag{1.6}$$

где су:

$\{D\} = \dfrac{\{A\}}{\{B\}}$,

$[D] = \dfrac{[A]}{[B]}$.

Ако су A и B истородне физичке величине, количник је математичка "бездимензиона" величина.

Аргументи експоненцијалних, логаритамских, тригонометријских и сличних функција могу бити само бездимензионе величине.

Величинске једначине

Величинске једначине (односно физичко величинске једначине) су једначине чији су чланови физичке величине изражене у општем или посебном облику. Величинске једначине у општем облику служе за изражавање физичких закона путем међусобних веза физичких величина (не зависе од мерних јединица). Пример величинске једначине у општем облику је једначина:

$$v = \frac{l}{t}. \tag{1.7}$$

Величинске једначине у посебном облику поред ознака физичких величина садрже и конкретне вредности физичких величина, изражене непосредно производима нумеричких вредности и мерних јединица. Пример величинске једначине у посебном облику је једначина:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{8\text{m}}{2\text{s}} = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{1.8}$$

Величинске једначине поред физичких величина могу садржати и нумеричке факторе (независно од избора јединица). Пример такве једначине је једначина за кинетичку енергију:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \tag{1.9}$$

Величинска једначина којом дефинишемо физичку величину C у зависности од физичких величина A и B је:

$$C=fA^aB^b \tag{1.10}$$

где је f – нумерички фактор.

Јединичне и нумеричке једначине

Из величинских једначина у општем облику изводимо јединичне и нумеричке једначине. Из величинске једначине (1.10) следи да је:

$$\{C\}[C] = f\{A\}^a\{B\}^b[A]^a[B]^b. \tag{1.11}$$

Јединична једначина која дефинише јединицу физичке величине C у зависности од јединица физичких величина A и B је:

$$[C]=[A]^a[B]^b. \tag{1.12}$$

Нумеричка једначина која дефинише нумеричку вредност физичке величине C у зависности од нумеричких вредности физичких величина A и B и нумеричког фактора је:

$$\{C\}=f\{A\}^a\{B\}^b. \tag{1.13}$$

На основу претходног следи да јединичне једначине служе за изражавање међусобних веза мерних јединица физичких величина. Нумеричке једначине служе за изражавање међусобних веза нумеричких вредности физичких величина које одговарају изабраним јединицама. Из величинске једначине за кинетичку енергију, где је: $m = 5$ kg и $v = 4$ m/s, следи да је:

$$E_k = \{E_k\}[E_k] = 40 \text{ kgm}^2/\text{s}^2; \tag{1.14}$$

јединична једначина је:

$[E_k] = kg\ m^2/s^2$; (1.15)

нумеричка једначина је:

$$\{E_k\}_{\frac{kgm^2}{s^2}} = \frac{E_k}{[E_k]} = 40. \qquad (1.16)$$

Нумеричке једначине у општем случају зависе од избора јединица и домен им је строго ограничен. Користе се претежно за серијска израчунавања нумеричких вредности физичких величина, као и за изражавање међусобних зависности нумеричких вредности физичких величина одређених непосредним мерењем (емпиријске нумеричке једначине).

Емпиријске једначине су нумеричке једначине којима се изражавају међусобне зависности нумеричких вредности физичких величина, одређених непосредним мерењима (зависе од употребљених јединица). Ако емпиријска једначина има теоријску основу у виду физичког закона, лако се претвара у величинску, иначе задржава облик нумеричке једначине.

Основне и изведене величине и јединице

У принципу, за сваки скуп истородних физичких величина може се утврдити посебна мерна јединица, независно од мерних јединица других скупова истородних физичких величина (чак се то може учинити и за сваку физичку величину). Тада би при проучавању појава у којима се јавља M величина морали дефинисати M јединица. Овакав систем није складан (кохерентан) јер:

1. Треба дефинисати велики број јединица (M)
2. Потребно је остварити велики број еталона
3. Јавља се велики број бројних коефицијената у физичким законима

Складан систем мерних јединица дозвољава одређивање само M – N јединица, где је N број основних релација између M физичких величина (у систему од N независних једначина са M променљивих може бити M – N независних параметара). Тако (договорно) одабране (M – N) физичке величине (сматрају се условно међусобно независне) представљају основне физичке величине система, а договорне (њихове) мерне јединице основне јединице система. Остале физичке величине се могу дефинисати (извести) уз помоћ физичких закона и називају се изведене физичке величине, а њихове јединице називају се изведене физичке јединице. Ако јединичне једначине којима се дефинишу изведене јединице не садрже ни нумеричке ни јединичне факторе различите од јединице, тада је систем кохерентан у односу на посматрани скуп величина и јединица. Изведене јединице кохерентног система дефинисане су алгебарским изразима у облику производа и степена основних јединица, без нумеричких или јединичних фактора.

Сваку физичку величину карактерише квалитет (или својство) и квантитет (или количина). Разне физичке величине разликују се међусобно по својој физичкој природи – квалитету, а природа физичке величине изражава се димензионом формулом. За јединичну једначину дату формулом:

$$Q = fA^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \tag{1.17}$$

димензиона једначина је:

$$\dim \mathrm{Q} = \mathrm{A}^{\alpha} \mathrm{B}^{\beta} \mathrm{C}^{\gamma} \tag{1.18}$$

Како постоје основне и изведене физичке величине, тако постоје и основне и изведене димензије. У механици где постоје три основне величине, постоје и три основне димензије за дужину (L), време (T) и масу (M). Тако израз за кинетичку енергију (2.9) у систему јединица LTM се може написати у облику:

$$\dim \mathrm{E_k} = \mathrm{L}^2 \mathrm{T}^{-2} \mathrm{M} \tag{1.19}$$

Само величине истих димензија се могу сабирати и тада је димензија збира једнака димензији сваког појединачног сабирка. Величине чији су сви димензиони експоненти једнаки нули називају се бездимензионалним величинама.

1.2.2. Систем мерних јединица

У међународном SI систему разликују се три класе јединица:

1. Основне јединице
2. Изведене јединице
3. Допунске јединице

Овако усвојен систем јединица користи се у целом свету у међународним односима, школству, научном истраживању итд. Заснован је на седам дефинисаних јединица које се споразумно сматрају независним. Ове јединице SI система су назване основним јединицама. Основне SI јединице, величине на које се те јединице односе и ознаке мерних јединица су дате у табели 1.1.

В е л и ч и н а	Основна јединица SI система	
	Н а з и в	Ознака
дужина	метар	m
маса	килограм	kg
време	секунда	s
електрична струја	ампер	A
термодинамичка температура	келвин	K
количина градива (супстанције)	мол	mol
светлосна јачина (јачина светлости)	кандела	cd

Табела 1.1. Основне јединице SI система

Друга класа јединица SI система су изведене јединице које су образоване комбиновањем основних јединица помоћу одређених алгебарских операција.

Трећа класа јединица SI система су допунске јединице и то угао у равни и просторни угао. Јединице SI система чине кохерентан скуп јединица.

Дефиниције основних јединица SI система

Основне јединице SI система су тренутно дефинисане на следећи начин:

1. Метар

Метар је јединица дужине. Метар је дужина пута коју светлост пређе у вакууму за време од 1/299792458 делова секунде.

2. Килограм

Килограм је јединица масе. Килограм је маса међународног еталона масе.

3. Секунда

Секунда је јединица времена. Секунда је временски интервал једнак са 9 192 631 770 периода зрачења које одговара прелазу између два хиперфина нивоа основног стања атома цезијума 133.

4. Ампер

Ампер је јединица јачине електричне струје. Ампер је јачина оне једносмерне струје која када протиче кроз два праволинијска паралелна проводника бесконачне дужине и занемарљивог кружног попречног пресека на међусобном растојању од 1 метра, у вакууму изазива између њих електродинамичку силу једнаку $2 \cdot 10^{-7}$ њутна по метру дужине.

5. Келвин

Келвин је јединица термодинамичке температуре. Келвин је термодинамичка температура која је једнака 1/273.16 делу термодинамичке температуре тројне тачке воде.

6. Мол

Мол је јединица количине супстанције. Мол је количина супстанције у систему која садржи онолико елементарних честица колико има атома у 0.012 kg угљеника 12.

7. Кандела

Кандела је јединица светлосне јачине. Кандела је светлосна јачина у датом правцу, из извора који емитује монохроматско зрачење фреквенције $540 \cdot 10^{12}$ херца, а има у том правцу енергетску јачину од 1/683 вата по стерадијану.

Изведене јединице SI система

Изведене јединице SI система дефинисане су алгебарским изразима у облику производа и количника основних јединица SI (у складу са дефиницијама одговарајућих величина, без икаквих нумеричких и јединичних фактора). Значи, изведене јединице нису дефинисане посебним договорима (као основне јединице) већ на основу физичких закона, па њихов број ничим није ограничен, већ се стално повећава са развојем науке.

Величина	Изведена јединица SI		Изражено	
	назив	ознака	другим јединицама SI	основним јединицама SI
фреквенција, учестаност	херц	Hz		s^{-1}
сила	њутн	N		$m\ kg\ s^{-2}$
притисак, напрезање	паскал	Pa	N/m^2	$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$
енергија, рад, количина топлоте	џул	J	Nm	$m^2\ kg\ s^{-2}$
снага, флукс зрачења	ват	W	J/s	$m^2\ kg\ s^{-3}$
наелектрисање, количина електрицитета	кулон	C		s A
напон (електрични), електромоторна сила	волт	V	W/A	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
електрична капацитивност	фарад	F	C/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2$
електрична отпорност	ом	Ω	V/A	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-2}$
електрична проводност	сименс	S	A/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^3\ A^2$
магнетска индукција	тесла	T	Wb/m^2	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
магнетски флукс	вебер	Wb	V s	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
индуктивност	хенри	H	Wb/A	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$
Целзијусова температура	степен Целзијуса	^oC		K
светлосни флукс	лумен	lm	cd sr	cd
осветљеност	лукс	lx	lm/m^2	m^{-2} cd
активност радиоактивног извора	бекерел	Bq		s^{-1}
апсорбована доза (јонизујућег зрачења)	греј	Gy	J/kg	$m^2\ s^{-2}$
еквивалентна доза (јонизујућег зрачења)	сиверт	Sv	J/kg	$m^2\ s^{-2}$

Табела 1.2. Изведене јединице SI система са посебним називом и ознакама

Често изведене јединице SI система представљају комбинацију већег броја основних јединица SI система тако да се њихово порекло тешко распознаје (дефинициони закон). Зато је Међународни систем увео скраћене називе и ознаке за неке од изведених јединица (оне се обично употребљавају самостално или у комбинацији са другим основним и изведеним јединицама). Специфична имена, симболи као и веза са основним јединицама, неких изведених јединица SI система са посебним именом и ознакама су дати у табели 1.2.

Допунске јединице SI система

У табела 1.3 су дати називи и ознаке допунских јединица SI система и величине на које се оне односе. Допунске јединице су бездимензионе, али је често погодније да се употребљавају њихови посебни називи и ознаке уместо броја један.

Величина	Назив	Ознака	Изражена основним јединицама SI
угао у равни	радијан	rad	$m \cdot m^{-1} = 1$
просторни угао	стерарадијан	sr	$m^2 \cdot m^{-2} = 1$

Табела 1.3. Допунске јединице SI система

Јединица угла у равни је радијан. Радијан је угао у равни између два полупречника круга који на његовом обиму исецају лук дужине једнаке полупречнику.

Јединица просторног угла је стерадијан. Стерарадијан је просторни угао са теменом у средишту лопте, која на површини лопте захвата површину једнаку површини квадрата одређеног полупречником те лопте.

Децимални умношци јединица SI система

Широк опсег појединих истородних величина чини њихове нумеричке вредности недовољно прегледним, ако их изражавамо искључиво у јединицама SI система. Стога, Међународни систем јединица посебно прописује и децималне умношке јединица SI система.

Децимални умножак јединице образује се стављањем међународно усвојених предметака SI система испред јединице. Назив предметка SI система и назив јединице, пишу се заједно као једна реч. Децимални предмеци не смеју се употребљавати самостално, без назива и ознаке јединице физичке величине на коју се односе.

Истовремена примена двају или више предметака SI система уз једну јединицу није дозвољена. У табели 1.4 су дати децимални умношци јединица SI система.

Назив	Ознака	Фактор	Назив	Ознака	Фактор
јота	Y	10^{24}	деци	d	10^{-1}
зета	Z	10^{21}	центи	c	10^{-2}
екса	E	10^{18}	мили	m	10^{-3}
пета	P	10^{15}	микро	μ	10^{-6}
тера	T	10^{12}	нано	n	10^{-9}
гига	G	10^{9}	пико	p	10^{-12}
мега	M	10^{6}	фемто	f	10^{-15}
кило	k	10^{3}	ато	a	10^{-18}
хекто	h	10^{2}	зепто	z	10^{-21}
дека	da	10^{1}	јокто	y	10^{-24}

Табела 1.4. Децимални умношци јединица SI система

Једино се називи и ознаке децималних умножака јединице масе образују применом предметка SI система на назив и ознаку јединице грам (g), а не килограм као основне јединице масе у SI систему (μg, mg). Препоручује се употреба децималних умножака јединица SI система у текстуалном излагању, табелама, графицима, саобраћајним знацима итд. Тако су уобичајене следеће децималне јединице: у географији (и у саобраћају), растојање у km, надморска висина у m, коте на цртежима у машинству у mm, снага електромотора и мотора СУС у kW, снага електрана у MW итд.

Мерне јединице изван SI система

Неке мерне јединице изван SI система имају дугу традицију и улогу у свакодневном животу и њихово елиминисање је нецелисходно. Зато међународне организације сматрају да њихову употребу треба дозволити, равноправно са децималним умношцима SI система. Њих наиме треба схватити као посебне умношке јединица SI система, којима су додељени посебни називи и ознаке. Неке од њих представљају децималне умношке јединица SI система (тона, литар, ар, хектар итд).

Јединица ван SI система		Вредност изражена јединицама SI система	Дозвољена употреба само
назив	ознака		
дужина			
морска миља		1 852 m	у воденом и ваздушном саобраћају
астрономска јединица		1.495 978 $7{\cdot}10^{11}$ m	у астрономији
светлосна година		$9.460\ 730{\cdot}10^{15}$ m	у астрономији
парсек	pc	$30.856\ 78{\cdot}10^{15}$ m	у астрономији
површина			
ар	a	100 m^2	за изражавање површине земљишта
хектар	ha	10 000 m^2	за изражавање површине земљишта
запремина			
литар	l, L	10^{-3} m^3	
Угао у равни			
степен (угаони)	°	(π/180) rad	
минута (угаона)	'	(π /10 800) rad	
секунда (угаона)	"	(π /648 000) rad	
гон	gon	(π /200) rad	
маса			
тона	t	10^3 kg	
јединица атомске масе	u	1.660 540 $2{\cdot}10^{-27}$ kg	у физици и хемији
подужна (линијска) маса			
текс	tex	10^{-6} kg/m	за изражавање подужне масе текстилног влакна и конца
време			
минута	min	60 s	
сат или час	h	3 600 s	
дан	d	86 400 s	
брзина			
чвор		1 852/3 600 m/s	у воденом и ваздушном саобраћају
притисак			
бар	bar	10^5Pa	
милиметар живиног стуба	mmHg	101 325 / 760 Pa	у здравству
енергија			
електрон волт	eV	1.602 177 $33{\cdot}10^{-19}$ J	у специјализованим областима
снага			
волт ампер	VA	W	за изражавање привидне снаге електричне наизменичне струје
вар	var	W	за изражавање електричне реактивне снаге

Табела 1.5. Јединице изван SI система чија је употреба законом дозвољена

Децималне умношке за време практично је немогуће применити у свакодневном животу, па се минут, час и дан сматрају законским умношцима јединица SI система. У табели 1.5 су дате мерне јединице изван SI система чија је употреба законски дозвољена.

Правила употребе и писања мерних јединица и физичких величина

Ознаке мерних јединица пишу се иза нумеричких вредности у изразима за величину, остављајући размак између нумеричке вредности и ознаке мерне јединице. Размак се не оставља испред јединица за угао у равни које се пишу као експонент: степен, минута и секунда. У нови ред се не сме пренети само ознака мерне јединице.

Ознаке мерних јединица могу се употребити и у заглављима табела, и ако не следе нумеричку вредност. Ознаке мерних јединица, по правилу, пишу се малим усправним словима латинице и словом грчке азбуке, али ако је ознака јединице изведена из личног имена, прво слово пише се великим словом.

Називи мерних јединица пишу се малим почетним словом (осим на почетку реченице) чак и за јединице које су добиле назив по презименима чувених светских научника. Називи мерних јединица могу се писати и ћирилицом или било којим другим писмом којим је писан остали део текста.

Ознаке мерних јединица пишу се без тачке на крају, изузев при нормалној интерпункцији, тј. на крају реченице. Ознаке мерних јединица не мењају се у множини нити по падежима.

Називи мерних јединица подлежу правилима језика, тј. имају и множину и падежну промену. Назив предметка SI и назив мерне јединице пишу се заједно као једна реч. Ознака предметка SI и ознака мерне јединице пишу се заједно.

Производ две мерне јединице обележава се тачком као симболом множења. Тачка се може изоставити кад је ознака мерне јединице таква да не може настати забуна ($a \cdot b$, ab, $a\ b$).

Када једна од двеју помножених јединица има ознаку која је иста као и ознака неког предметка, мора се употребити размак, правилан редослед (јединица која има исту ознаку као и неки предметак пише се на крају), или још боље, тачка као симбол множења (N·m, N m).

Ако се мерна јединица образује међусобним дељењем двеју мерних јединица, као симбол дељења може се употребити хоризонтална црта (–) или коса црта (/), али само једанпут, или изложилац са негативним знаком ($\frac{a}{b}$, a/b или $a\,b^{-1}$). Иза косе црте у истом реду не сме да се употреби знак множења или дељења, осим кад се поставе заграде да би се избегла двосмисленост ($\frac{a/b}{c} = (a/b)/c$, $\frac{ab}{c} = ab/c = abc^{-1}$).

Уз ознаку мерне јединице не дају се посебне ознаке у циљу додатног податка о природи величине или о мерењу које се разматра. На пример: ако израз треба да значи да је маса алуминијумске шипке 50 g то се пише m_{Al} = 50 g, а погрешно је m = 50 $\mathrm{g_{Al}}$.

Опсег вредности, више вредности, мере и толеранције пишу се према следећим примерима:

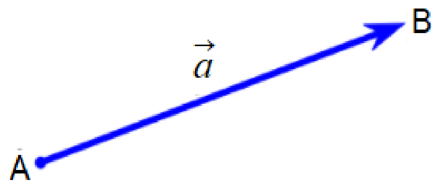
Pravilno:	***Pogrešno:***
100 ° C ± 5 ° C, (100 ± 5) ° C	100 ± 5 ° C
2 kg, 3 kg i 4 kg	2, 3 i 4 kg
80 mm x 25 mm x 50 mm	80x25x50 mm
20 kg do 30 kg	20 – 30 kg, 20 kg – 30 kg

Ознаке величина су, по правилу, слова латинског или грчког алфабета, која понекад могу имати индекс. Ове ознаке се пишу курзивом (коса слова, "италик"), без обзира на тип слова употребљен у остатку текста. Иза ознаке величине не ставља се тачка, изузев при нормалној интерпункцији, тј. на крају реченице. Индекс који представља ознаку величине пише се курзивом. Сви остали индекси пишу се усправним словима, односно бројевима.

1.3. Скаларне и векторске физичке величине

Физичке величине према својој природи могу се поделити на скаларне, векторске и тензорске. Скаларне величине су потпуно одређене својом бројном вредношћу и одговарајућом мерном јединицом. Такве физичке величине су су, на маса, температура, време, електрични отпор, енергија и друге.

Физичке величине које су одређене својом бројном вредношћу (интензитетом), правцем и смером зову се векторске величине или кратко, вектори. Векторске величине су: сила, брзина, убрзање, импулс, угаона брзина итд. Векторске величине графички се представљају оријентисаним одсечком праве чија дужина одговара интензитету вектора, правац тог одсечка одређује правац вектора, а стрелица његов смер (слика 1.1).



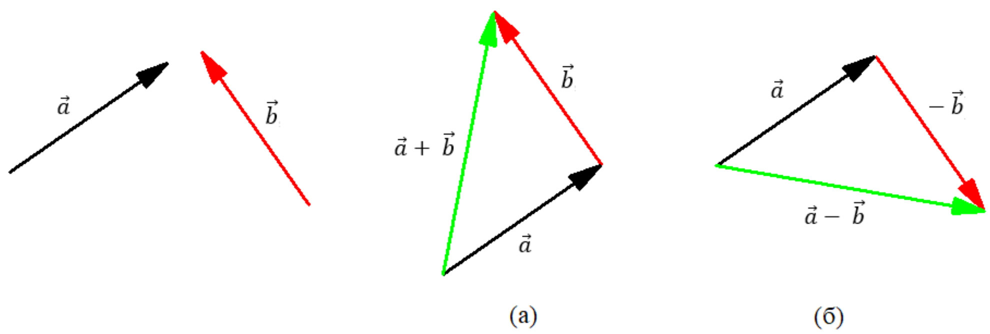
Слика 1.1. Вектор у правцу од А до В.

Два вектора су једнака уколико имају исте интензитете, паралелне правце и исти смер. Уколико два вектора имају исте интензитете, паралелне правце и супротне смерове, онда их називамо супротним векторима. Нула-вектор је вектор чији је интензитет једнак нули. Јединични вектор (орт) је вектор чији је интензитет једнак јединици. За сваки не-нула вектор $\vec{a}$ се може одредити одговарајући јединични вектор $\vec{\imath}$ истог правца и смера:

$$\vec{\imath} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{1.20}$$

Збир два вектора, $\vec{a} + \vec{b}$, можемо добити уколико почетак вектора $\vec{b}$ паралелним померањем доведемо до краја вектора $\vec{a}$. Њихов збир је вектор $\vec{c}$ чији је почетак у почетку вектора $\vec{a}$, а завршава се на крају вектора $\vec{b}$ (слика 1.2а).

Разлика два вектора, $\vec{a} - \vec{b}$, је вектор који почиње на крају вектора $\vec{b}$ а завршава се на крају вектора $\vec{a}$. Можемо добити уколико почетак вектора $-\vec{b}$ паралелним померањем доведемо до краја вектора $\vec{a}$. Њихов збир је вектор $\vec{c}$ чији је почетак у почетку вектора $\vec{a}$, а завршава се на крају вектора $-\vec{b}$ (Слика 1.2б). Разлика вектора $\vec{a} - \vec{b}$ може се представити као збир $\vec{a} + (-\vec{b})$.



Слика 1.2. Операције са векторима.

Множење вектора скаларом даје вектор истог правца и смера, а интензитета једнаког умношку интензитета вектора и скалара. Међусобно се векторима могу извести две операције множења: скаларно и векторско множење. Скаларни производ два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је скаларна величина дефинисана на следећи начин:

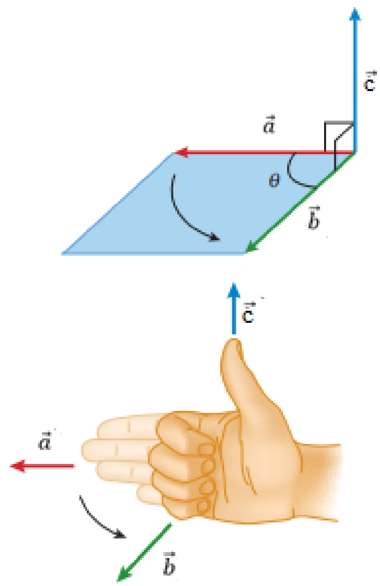
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}). \tag{1.21}$$

Уколико су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ међусобно нормални, њихов скаларни производ је нула, зато што је cos(π/2)=0.

Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ чији је интензитет:

$$c = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}). \tag{1.22}$$

Правац овог вектора је нормалан на раван коју образују вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а смер му се одређује тако да са полазним векторима образује десни тријedar, слика 1.3, односно на основу тзв. правила десног завртња (ако би се десни завртањ обртао тако да по мањем углу доведе први вектор до поклапања са правцем другог, смер померања завртња би се поклапао са смером вектора $\vec{c}$.



Слика 1.3. Векторски производ

На основу правила о одређивању смера вектора да се закључити да за векторски производ не важи правило комутативности, односнио да се заменом редоследа вектора у векторском производу мења знак производа, тј.:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \tag{1.23}$$

1.4. Мерење и грешке мерења

Под мерењем се подразумева скуп експерименталних поступака који имају за циљ одређивање вредности физичке величине. Одређивање конкретне вредности мерене величине се врши поређењем са величином која је договорно изабрана за јединицу, погодном методом. Тачност мерења зависи од тачности којом је репродукована јединица, као и од тачности изабране мерне методе.

1.4.1. Класификација и методе мерења

У зависности од начина добијања бројне вредности мерене величине разликујемо:

1. непосредна (директна) мерења
2. посредна (индиректна) мерења

Код непосредних (директних) мерења се до мерног резултата долази непосредно поређењем мерене величине са изабраном јединицом (дужина метром, отпор омметром, снага ватметром, итд.). Код посредних (индиректних) мерења се до мерног резултата долази непосредним мерењем физичких величина које улазе у законитост која повезује индиректно мерену величину са непосредно мереним величинама, а онда се рачунским путем добија вредност индиректно мерене физичке величине (мерење отпора преко мерења струје и напона $R = U / I$, итд.)

Најопштија подела метода мерења је према начину како користимо мерно средство:

1. Методе непосредног оцењивања
2. Методе упоређивања

Методе непосредног оцењивања се састоје у томе да се вредност мерене величине непосредно одређује мерним инструментом (струју амперметром, напон волтметром итд.). Код аналогних инструмената вредност се одређује на основу скретања игле инструмента (методе скретања). Код дигиталних инструмената мерење вредности се приказује у облику броја на дисплеју инструмента.

Методе упоређивања се могу поделити на: нулте методе, диференцијалне методе, методе замене и методе директног поређења. Нулта метода се састоји у упоређивању мерене физичке величине са тачно познатом вредношћу исте величине - директна нулта метода или са тачно познатом вредношћу неке друге величине - индиректна нулта метода (мерење струје и напона компензационом методом итд). Код диференцијалне методе мерена физичка величина се упоређује са блиском референтном количином те исте физичке величине, а разлика се детектује као мера вредности. Метода замене (супституције) се заснива на томе да показивање индикаторског система буде иста када се мери мерна физичка величина и еталон. Метода директног поређења се користи за проверу тачности неког инструмента поређењем његовог показивања са показивањем инструмента еталона (редно у колу амперметар и еталонски инструмент итд.).

У индустрији се најчешће користе методе непосредног оцењивања (најпрактичније, али мање тачне), док се у лабораторији углавном користе методе упоређивања (тачније, али су компликованије).

1.4.2. Грешке у мерењима

Због несавршености мерних метода и средстава, субјективних грешака експериментатора, утицаја спољних фактора на резултате мерења итд., резултат мерења се неминовно разликује од тачне вредности мерене физичке величине. Ово одступање резултата мерења од тачне вредности мерене величине назива се грешка мерења. У зависности од начина како се бројно изражава грешка мерења разликујемо:

1. апсолутну грешку мерења, Δx
2. релативну грешку мерења, g

Апсолутна грешка Δx је изражена у јединицама мерене величине и износи:

$$\Delta x = x - x_o , \qquad (1.24)$$

где су: x – вредност добијена при мерењу, x_o – тачна вредност мерене величине.

Релативна грешка даје бољу представу о тачности мерења и дефинише се релацијом:

$$g = \frac{\Delta x}{x_o} = \frac{x - x_o}{x_o} . \qquad (1.25)$$

Релативна грешка се може изразити у процентима °/₀ (10^{-2}), промилима °/₀₀ (10^{-3}) или у ppm (10^{-6}).

Тачна вредност величине x_o је идеалан појам и није нам познат. Стога је реалније дефинисати апсолутну грешку као: апсолутна грешка = резултат мерења – вредност поређења. Вредност поређења може бити: конвенционо тачна вредност (добијена најтачнијом методом или најпрецизнијим инструментом – еталоном) или аритметичка средња вредност мерења $\bar{x}$. У првом случају апсолутна грешка мерења представља стварну апсолутну грешку ($\Delta x = x - x_o$), за разлику од привидне апсолутне грешке ($\Delta x_i = x_i - \bar{x}$) у другом случају ($x_i$ – вредност i – тог мерења из серије).

1.4.3. Апсолутна и релативна грешка мера

Под мером се подразумева мерни прибор који на перманентан начин репродукује, у току употребе, једну или више вредности дате величине (тегови, мерни отпорници, мерни кондензатори итд.). Разликујемо номиналну и конвенционално (договорно) тачну вредност мере. Номинална вредност је вредност мере назначена на мери (на пример тег 1 kg). Конвенционална тачна вредност представља "стварну" вредност мере (утврђену упоређивањем мере са одговарајућим еталоном).

Тачност мера се утврђује помоћу апсолутне и релативне грешке мере. Апсолутна грешка мере је:

$$\Delta x = x - x_o, \tag{1.26}$$

где су: x – номинална вредност, x_o – конвенционално тачна вредност.

Релативна грешка мере је:

$$g = \frac{\Delta x}{x_o}. \tag{1.27}$$

Конвенционална тачна вредност мере се из номиналне вредности мере добија корекцијом $k = -\Delta x$.

1.4.4. Апсолутна и релативна грешка показних инструмената

Показни електрични мерни инструмент је уређај који показује вредност мерене електричне величине положајем казаљке на скали. Скретање казаљке (материјална, светлосна итд.) је пропорционално интензитету мерене величине. Одступање показивања показног мерног инструмента од конвенционално тачне вредности назива се грешка показног инструмента. Апсолутна грешка показног инструмента је:

$$\Delta x = x - x_o, \tag{1.28}$$

где су: x – показивање инструмента; x_o – конвенционално тачна вредност;

Релативна грешка показног инструмента је:

$$g = \frac{\Delta x}{x_o} \qquad (1.29)$$

1.4.5. Тачност и прецизност мерења

Тачност мерења је блискост слагања резултата мерења и (договерне) тачне вредности мерене величине. Изражава се апсолутном или релативном грешком (северички стандард) мерења.

Прецизност мерења је блискост међусобног слагања резултата мерења (степен међусобог подударања резултата мерења). Она је карактеристика мерног процеса који произилази из поновљивости мерења. Математички се описује (дефинише) стандардном девијацијом или у новије време релативном стандардном девијацијом.

1.4.6 Врсте грешака мерења

Независно од врсте узорака које доводе до грешака мерења, најопштија подела је на: грубе грешке, систематске грешке и случајне грешке.

Грубе грешке мерења

Грубе грешке се најчешће јављају услед: непажње руковаоца приликом очитавања инструмената, погрешног руковања инструментом, погрешног избора методе мерења, неисправног мерног средства итд. Ове грешке се избегавају са повећаном пажњом руковаоца, бољим познавањем мерних средстава и редовном калибрацијом мерних средстава. Грубе грешке се не узимају у обзир при обради резултата мерења зато што је вероватноћа појављивања оваквих грешака веома мала.

Систематске грешке мерења

Систематска грешка мерења је компонента грешке мерења која током низа мерења исте мерене величине остаје стална или се мења на предвидљив начин. Систематске грешке се најчешће јављају услед:

а) насавршености мерних средстава (померена нула скале инструмента, погрешно калибрисан инструмент, итд).

б) несавршености мерних метода (не узимање у обзир сопствене потрошње употрељених инструмената – волтметар, неодговарајући мерни мост, итд.).
ц) несавршености мерних објеката (нехомогеност узорака који се мери, недовољна паралелност ивица при мерењу дужине, неједнакост тврдоће узорака дуж запремине при мерењу тврдоће, итд.).
д) утицаја промене амбијенталних услова (температура и влажност при мерењу отпорности, итд.)

Да би се одстраниле или умањиле систематске грешке потребно је одстранити њихове узроке обезбеђењем референтних услова амбијента, правилним избором методе мерења и мерних средстава, и применити одговарајуће корекције. Свако коректно обављање мерења представља елиминисање највећег дела систематских грешака, али један део остаје присутан (било услед непознавања узорака или недовољно прецизних корекција). То су тзв. неискључиве систематске грешке које се обавезно наводе у извештајима о мерењу или калибрацији.

Случајне грешке мерења

Случајне грешке манифестују се на тај начин што се приликом вишеструко поновљеном мерењу једне исте константне физичке величине, при истим условима мерења (исти мерилац, иста метода и инструменти мерења, као и исти амбијетални услови) добијају различити резултати мерења. Случајне грешке настају при истовременом дејству многих узрока, чија се дејства мењају по стохастичком начину, при чему сваки од њих доприноси грешкама резултата мерења, тако да се може рећи да практично настају од непознатог узрока. За разлику од систематских грешака које чине резултате мерења нетачним, случајне грешке чине тај резултат непоузданим. Случајне грешке се не могу елиминисати (као систематске) али се њихов утицај може смањити повећањем броја мерења и применом статистичких метода обраде резултата мерења.

1.4.7. Обрада резултата мерења

Задатак обраде резултата вишеструко поновљених мерења константне физичке величине је процена праве вредности мерене величине и процена мерне несигурности коригованог резултата мерења. Процена праве вредности мерене физичке величине састоји се у одређивању њене највероватније вредности (аритметичка средина) и кориговању ове вредности на познате систематске грешке мерења. Процена мерне несигурности састоји се у одређивању њене случајне компоненте на основу поновљених мерења и систематске компоненте као последице непознатих (неискључених) систематских грешака. Кориговање аритметичке средине за познате систематске грешке, као и одређивање систематске компоненте мерне несигурности, обавља се на основу искуства, калибрације мерних уређаја, итд.

Уколико се пође од претпоставке да су претходном анализом елиминисане све систематске грешке, статистичком анализом резултата мерења се могу добити: највероватнија права вредност мерене величине и укупна мерна несигурност. У том циљу дефинишу се следећи појмови: аритметичка средина, стандардна девијација и стандардна девијација аритметичке средине резултата мерења.

Аритметичка средина резултата мерења

Нека је резултат вишеструких мерења исте физичке величине (под истим условима), уз претпоставку да су елиминисане систематске грешке и да су присутне само случајне грешке, низ појединачних резултата мерења x_1, x_2,..., x_i,... x_{n-1}, x_n. Са сигурношћу се једино може тврдити да се права вредност x_o мерене физичке величине налази између x_{min} и x_{max}:

$$x_o \in (x_{min}, x_{max}) . \tag{1.30}$$

Ово произилази из претпоставке да су мерења извршена на исти начин. Стварна апсолутна грешка појединачног мерења је:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - x_o \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_o \\ &. \\ \Delta x_i &= x_i - x_o \\ &. \\ \Delta x_n &= x_n - x_o \end{aligned} \tag{1.31}$$

Из једначина (1.27) следи да је:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n = x_1 + x_2 + ... + x_n - n x_o \tag{1.32}$$

односно:

$$x_o = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) - \frac{1}{n}(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n)\,. \tag{1.33}$$

Ако дефинишемо први члан, који је аритметичка средина резултата мерења, једначином:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \tag{1.34}$$

тада се једначина (1.29) се може написати у облику:

$$x_o = \bar{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \bar{x} - \varepsilon \tag{1.35}$$

где је:

$$\varepsilon = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\,, \tag{1.36}$$

аритметичка средина стварних апсолутних грешака појединачних мерења. Како Δx_i може имати позитивну и негативну вредност, једначина (1.35) се може написати као:

$$x_o = \bar{x} \pm |\varepsilon|\,. \tag{1.37}$$

Према Гаусовој теорији случајних грешака важе следећи аксиоми:

а) при великом броју поновљених мерења, једнако вероватно настају случајне грешке једнаких вредности, а супротног знака;

б) вероватноћа појављивања малих грешака већа је од вероватноће појављивања великих грешака.

Из аксиома а) следи да је:

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon \to 0\,, \tag{1.38}$$

односно $x_o \cong \bar{x}$, тј. аритметичка средина резултата мерења је највероватнија вредност мерене величине при вишеструко поновљеним мерењима. Исти закључак се може извести из услова да је сума квадрата одступања мерене величине од највероватније вредности минимална (Гаусова метода најмањих квадрата).

Уколико број поновљених мерења $N \to \infty$, кажемо да је скуп мерених вредности потпун, односно да се ради о популацији. Аритметичка средина популације μ је:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\,. \tag{1.39}$$

Уз елиминисане систематске грешке $\mu = x_o$, односно аритметичка средина популације једнака је правој вредности мерене величине. У пракси је немогуће извршити бесконачан број мерења и одредити μ (као и x_o). Због тога се у статистичкој анализи користи узорак из популације (део популације), односно репрезентативни узорак који је изабран методом случајног узорковања (реално n мерења је до неколико десетина). Аритметичка средина узорка је:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{\mathrm{i}} \ . \tag{1.40}$$

Аритметичка средина узорка $\bar{x}$ се увек разликује од аритметичке средине популације μ. Блискост ове две аритметичке средине квантитативно се описује статистичким појмом стандардна девијација. Задатак статистике је да математички разматрањем узорака процени карактеристике популације.

Стандардна девијација

За процену прецизности неког мерења (степен одступања мерених резултата – случајна грешка) користи се појам стандардна девијација. Стандардна девијација је она грешка која, када би се јавила у свих n мерења, дала исту суму квадрата грешака, као и сума квадрата стварних апсолутних грешака. За $n \to \infty$ стандардна девијација се обележава са σ.

$$n\sigma^2 = (x_1 - x_{\mathrm{o}})^2 + (x_2 - x_{\mathrm{o}})^2 + \ldots + (x_n - x_{\mathrm{o}})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{o}})^2 \ , \tag{1.41}$$

односно:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{\mathrm{i}} - x_o)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_{\mathrm{i}}^2 \ . \tag{1.42}$$

Статистичка величина σ^2 се назива варијанса или дисперзија. Стандардна девијација σ је:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{o}})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_{\mathrm{i}}^2} \ . \tag{1.43}$$

Стандардна девијација σ је дата у истим јединицама као и мерена величина, док је варијанса σ^2 адитивна величина ($\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$) и има предност код рачунања.

Релативна стандардна девијација r је дефинисана релацијом:

$$r = \frac{\sigma}{x_{\mathrm{o}}} = \frac{1}{x_{\mathrm{o}}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{o}})^2} \tag{1.44}$$

Ове дефиниције (за $n \to \infty$) и уз праву вредност x_{o} су непрактичне. Због тога се полази од реалног случаја, односно потребно је успоставити везу између стварних грешака $\Delta x_i = x_i - x_o$ и привидних грешака v_i који се дефинишу као $v_i = x_i - \bar{x}$. Стандардна девијација за n појединачних мерења x_i је сада:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{1.45}$$

1.4.8. Обрада резултата индиректно мерене величине

Код индиректно мерења се не мери величина која нас интересује, већ друге величине које су са њом повезане неком функционалном и познатом зависношћу. Како је свака од директно мерених величина позната са дефинисаном грешком, задатак се своди на одређивање грешке индиректно мерене величине, на основу познавања грешака појединих директно мерених величина.

Систематска грешка индиректно мерене величине

У општем случају зависност индиректно мерене величине y од директно мерених величина x_1, x_2,..., x_i,... x_n, може да се напише у облику:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots, x_n)\,. \tag{1.46}$$

Уколико је индиректно мерена величина функција само једне директно мерене величине, тада је:

$$y = f(x)\,. \tag{1.47}$$

Ако је физичка величина x измерена са неком систематском грешком Δx, тада ће и величина y бити одређена са неком систематском грешком Δy, односно:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)\,. \tag{1.48}$$

Сматрајући да је $\Delta x << x$, односно да је систематска грешка директно мерене величине знатно мања од вредности мерене величине, може да се напише $\Delta x \to dx$ и $\Delta y \to dy$, и једначина (1.48) постаје:

$$y + dy = f(x + dx)\,. \tag{1.49}$$

Развијањем у Тејлоров ред десне стране једначине (1.49) добија се:

$$y + dy = f(x) + f'(x)\mathrm{d}x + \frac{f''(x)}{2}(dx)^2 + \ldots \tag{1.50}$$

Занемарујући чланове другог и вишег реда, добија се:

$$dy = f'(x)\mathrm{d}x\,, \tag{1.51}$$

односно:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x\,. \tag{1.52}$$

Из једначине (1.52) следи да је систематска грешка индиректно мерене величине једнака систематској грешки директно мерене величине помножене са изводом дате функције. Релативна систематска грешка индиректно мерене величине добија се ако се обе стране једначина (1.51) и (1.52) поделе са y:

$$g_{\mathrm{y}} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)dx}{\mathrm{y}} = d(\ln y) = d[\ln f(x)]. \tag{1.53}$$

У општем случају када је индиректно мерена величина y функција више међусобно независних директно мерених величина x_{i}, једначина (1.46), и ако су систематске грешке појединих директно мерених величина Δx_{i}, при чему је у сваком појединачном случају $\Delta x_{\mathrm{i}} << x_{\mathrm{i}}$, тада се сличним поступком као у предходној анализи, долази до систематске грешке индиректно мерене величине, која је тотални диференцијал функције y:

$$\Delta y = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \left(\frac{\partial f(x_{\mathrm{i}})}{\partial x_{\mathrm{i}}} \Delta x_{\mathrm{i}} \right). \tag{1.54}$$

Релативна грешка у овом случају је:

$$g_{\mathrm{y}} = \frac{\Delta y}{y} = d[\ln f(x_1, x_2, ... x_{\mathrm{i}}, ..., x_{\mathrm{n}})]. \tag{1.55}$$

Ако се одређивање директно мерених величина обавља са израженим случајним грешкама, што показује растурање резултата, док су све познате систематске грешке отклоњене, тада једначина (1.54) није погодна за процену грешке мерења индиректно мерене величине, јер ни вредност ни знак појединих парцијалних грешака нису познати. Зато се једначина (1.54) квадрира, после чега се добија:

$$(\Delta y)^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \left(\frac{\partial y}{\partial x_{\mathrm{i}}} \Delta x_{\mathrm{i}} \right)^2 + 2 \sum_{\substack{\mathrm{i}=1 \\ \mathrm{j}=\mathrm{i}+1}}^{\substack{\mathrm{j}=\mathrm{n} \\ \mathrm{i}=\mathrm{n}-1}} \left(\frac{\partial y}{\partial x_{\mathrm{i}}} \Delta x_{\mathrm{i}} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_{\mathrm{j}}} \Delta x_{\mathrm{j}} \right). \tag{1.56}$$

Како парцијалне грешке са подједнаком вероватноћом имају позитиван и негативан знак, други члан у једначини (1.56) се може занемарити код већег броја чланова суме и добија се :

$$\Delta y \cong \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial y}{\partial x_{\mathrm{n}}} \Delta x_{\mathrm{n}} \right)^2}\,, \tag{1.57}$$

што представља најреалнији поступак за одређивање грешке индиректно мерене величине и назива се највероватнија грешка.

Стандардна девијација индиректно мерене величине

Нека се до сваке појединачне директно мерене величине x_i у једначини (1.46) долази вишеструким понављањем мерења (свака величина x_i мерена n пута), и нека за њих важи нормална расподела случајних грешака. Тада се као највероватнија вредност величине x_i може узети њена аритметичка средина $\overline{x_i}$. Зато ће у једначини (1.46) фигурисати $\overline{y}$ и $\overline{x_i}$, уместо y и x_i.

Ако је s_i стандардна девијација директно мерене величине x_i, тада се стандардна девијација индиректно мерне величине y добија заменом одговарајућих случајних грешака директно мерених величина Δx_i стандардним девијацијама s_i у једначину (1.57):

$$s_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} s_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} s_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} s_n\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} s_i\right)^2} \qquad (1.58)$$