

**ГЕОДЕЗИЈА И ГИС**  
**ГЕОДЕЗИЈА СА ОСНОВАМА ГИС-А**

Писана предавања



В. проф. др **Милева Самарџић-Петровић**, дипл.инж.геод.

## 1. Увод у геодезију

Геодезија је најстарија наука о Зељи, тј. најстарија геонаука. Човек се из страха и радозналости, вођен жељом да разуме и предвиди природне феномене интересовао за Земљу још од времена када је еволуирао у свесно биће. Разни природни феномени које је око себе опажао, углавном су одређивали његово понашање и давали повода за развој празноверја, ритуала и култова. Али ово је истовремено стално проширивало његова сазнања, што је резултирало изненађујуће дубоким разумевањем неких природних феномена, које су нам древне културе и цивилизације оставиле у тако очигледним облицима као што су споменици, храмови и градови. Ти природни феномени често су повезани са величином, обликом и гравитационим пољем Земље, и њихово разумевање захтевало је одређено познавање геодезије. Читав низ векова једини начин изучавања геометрије Земље представљала су опажања Сунца, Месеца, планета и звезда. Стога је испрва развој геодезије ишао упоредо са развојем астрономије. Заједно са астрономијом геодезија спада у најстарије науке уопште, а несумњиво је најстарија геонаука (Благојевић, 1999; ScienceDirect, 2024 ).

Класична дефиниција из 1880. године, према једном од оснивача модерне геодезије Friedrich Robert Helmert-у гласи:

*„Геодезија је наука о мерењу и приказивању Земљине површине“.*

Petr Vaníček, канадски геодета и геофизичар чешког порекла и E.J.Krakowski, су 1986. године геодезију дефинисали као:

*„Геодезија је научна дисциплина која се бави мерењима и представљањем Земље и њеног спољашњег гравитационог поља у тродимензионалном простору који се мења са временом.“*

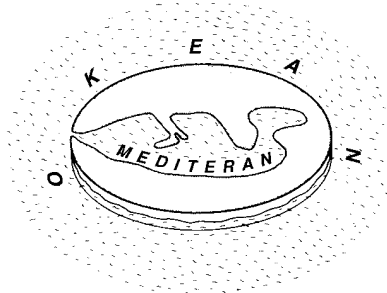
Савремено схватање проширује ову дефиницију и на остале планете Сунчевог система.

Реч „геодезија“ потиче од грчке речи „γεωδαισια“, која је сложеница од „γῆ“ што значи земља, и „δαιω“ што значи делити. Грчки назив "подела земље" потиче од практичних проблема власништва над земљом који су мучили народе Египта и Месопотамије, као и оне који су насељавали долину Инда и подручје Жуте реке. У тим првим жариштима цивилизације настају пре више од 5000 година геодетске методе меревања.

### 1.1. Историјски развој геодезије

Очувано је веома мало докумената о геодетским достигнућима најстаријих цивилизација Сумера, Египћана, Кинеза и Индијаца. Постоје, међутим, многи докази да су изводили веома тачна мерења, барем у вези основних кретања Земље.

За време грчке ере геодезија је сматрана једном од најизазовнијих дисциплина, и стога су се њоме бавили неки од највећих мислилаца тог периода. Први документовани трагови геодезије потичу од Талеса из Милета (625.-547. п.н.е.) општепризнатог оснивача тригонометрије. Његов концепт Земље сводио се на тело облика диска које плива по бесконачно великом океану. Vaníček-ова и Krakowsk-ова (Благојевић, 1999) интерпретација ове идеје приказана је на Слици 1.1.



Слика 1.1: Интерпретација Талесовог концепта Земље (Благојевић, 1999)

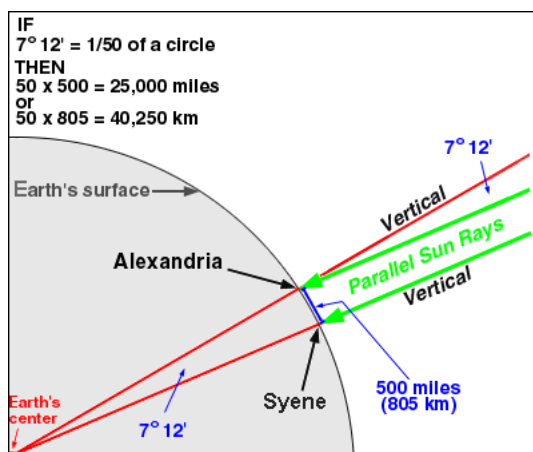
Његов савременик Анаксимандар из Милета (611.-545. п.н.е.) био је први који је користио концепт небеске сфере. Ова идеја преживела је векове астрономског мишљења, и још увек важи за корисну идеализацију у позицијској астрономији. Учење Питагоре (580.-500. п.н.е.) у шестом веку п.н.е. прво је које је промовисало сферну Земљу, што је представљало идеју која ће преживети преко два миленијума. Крајем шестог века п.н.е. Хекатеј саставља једну од првих познатих карата света (Слика 1.2).



Слика 1.2: Хекетејева карта света (Благојевић, 1999)

Аристотел (384.-322. п.н.е.) је први наговестио постојања гравитације, и уз то у четвртном веку п.н.е. формулисао и данас важећи доказ за сферни облик Земље. Пошто је идеја о сферном облику Земље постепено прихватана, Дикерх крајем трећег века п.н.е. у употребу уводи сферне координате. Међутим, правим оснивачем геодезије може се сматрати Ератостен, човек са престижним положајем књижара чувеног Александријског музеја, који је одредио величину Земље мерењем разлике астрономских ширина Александрије и Асуана. Ератотен је тада под претпоставком да је Земља облика сфере одредио обим Земље 40.250 до 45.900 km упоређујући релативни положај Сунца на две различите локације на површини Земље. Због разлика

у преводима или тумачењима његових записа као и сопствених методолошких грешака, тачне бројке су спорне. Данас се обично прихвата да је обим Земље 40.096 km. Ако се узму најниже процене која се приписује Ератостену, његова грешка је била мања од један проценат (Jochen A., 2024). Ератотен је такође веровао у постојање огромних океана, што је на потврду чекало читавих 17 векова.



Слика 1.3. Начин на који је Ератотен одредио величину Земље (Jochen A., 2024)

Са Ератостеном се практично завршила ера оригиналних мислилаца и експериментатора. Након тога геодезија стагнира неких 1500 година, осим повремених компилација грчких достигнућа. Једини значајни изузетак за време Римског царства представља увођење Јулијанског календара од стране Сосигена под Јулијем Цезаром средином првог века п.н.е. Овај календар, уз малу грегоријанску реформу 1582. године, важи и данас.

Крајем грчке ере неке од веома важних радова изводио је грчки астроном Клаудије Птолемеј, и објавио их у монументалном делу о астрономији и геодезији познатом под својим арапским именом Алмагест. У подједнако важном делу о географији објављеном 150. године, Птолемеј је представио и нову карту света, непревазиђену наредних 14 векова (Слика 1.4.).



Слика 1.4.: Птолемејова карта света (Благојевић, 1999)

У вековима који су следили након пада Римског царства, односно за време средњег века, геодезија је заједно са многим другим наукама таворила под скутима теологије. Грчко учење преживело је ово мрачно доба углавном у арапским верзијама, које су у 12. веку некако пронашле пут у Европу преко Шпаније и биле преведене на латински језик ондашњих интелектуалаца. Повремени научни бљесци за време средњег века били су веома ретки. Персијанац Каразми од чијег имена је настала реч алгоритам, поново је одредио величину Земље, објавио је карту света сличну Птолемејевој, и увео индијске цифре у арапску математику. Ствари су почеле да се покрећу тек у 14. веку који је наговештавао еру великих открића. Тосканели представља нову карту света која је била главни мотив Колумбовог покушаја да плови западно и нађе нови пут до Индије. Све боље познавање географије захтевало је и бржи развој професије картографа. Међу најпознатијима је Америго Веспучи, који је израдио прву карту северноамеричке пацифичке обале и по коме је континент назван. Фламанац Меркатор, који се често сматра оцем модерне картографије, веома успешно је одговорио на потребу навигатора за картама са најмањим деформацијама.

Знаци поновног оживљавања геодезије могу се уочити средином 15. века, када се појавио низ мислилаца, као што су Никола од Кузе и Леонардо да Винчи, који су утрли пут за Коперника и Кеплера. Ипак, битка са теологијом још није била готова. Астронома Бруна спаљују између осталог и зато што је имао исте погледе као и Никола од Кузе и Коперник пре њега. Прича о Галилејевом изнуђеном одрицању од хелиоцентричне теорије, такође је добро позната.

Што се тиче геодезије, богатство идеја које је у међувремену нарасло представљало је почетак правог научног увида у гравитацију експериментима Стевина и Галилејевом формулацијом првог закона механике. Снелијус 1615. године изводи прву тачну триангулацију и истражује рефракцију. Француз Пикар изводи 1670. године одређивање величине Земље, и његова вредност полупречника Земље од 6275 km прво је побољшање Ератостена након XIX векова. Сцена је коначно постављена за најзначајније откриће ове ере, Њутнов закон универзалног привлачења из 1687. године. Француска академија наука организовала је у периоду од 1735. до 1743. године две експедиције за мерење меридијанских лукова и одговарајућих разлика ширина. Прва је отишла у Перу под вођством Бугеа. Друга, предвођена Мопертијусом упућена је у Лапландију. Резултати две експедиције потврдиле су исправност Њутнове теорије по којој је Земља спљоштена дуж екватора.

Пионирски радови Снелијуса, Пикара и две француске експедиције, показали су да су терестричка геодетска мерења углова и дужина вредно оруђе за релативно позиционирање. Мреже тачака са хоризонталним положајима одређеним из мерења углова и повремено дужина, познате као тригонометријске мреже, почеле су да се шире свим деловима Европе као основа за израду карата. Инструменти потребни за триангулацију, теодолити и уређаји за мерење дужина као што су жице и пантљике, постајали су све

тачнији и лакши за рад. Одређивање положаја тачака из терестричких и астрономских мерења била су свакодневни геодетски посао између 1750. и 1950. године, тако да чак и данас многи геодезију сматрају синонимом ових активности.

У то време, основни геодетски задаци представљају интелектуални изазов највећим мислиоцима и побуђују интересовање једнако оном у освит цивилизације. Тако Гаус, највећи математичар раног деветнаестог века, проналази хелиотроп и врши мерења у геодетској мрежи краљевине Хановер. У ретко насељеној и пространој Америци, геодете као Џорџ Вашингтон користе посебне методе за позиционирање и израђују прве карте Северне Америке 1755. године.

Укорак са развојем геодетског позиционирања ишла су открића и у другим аспектима геодезије. Године 1798. Кевендиш користи торзиону вагу и успева да измери "тежину" Земље. Математичар Лаплас поставља темеље модерне небеске механике и теорије плиме, и даје огроман допринос теорији вероватноће. Немачки астроном Бесел одређује прву тачну вредност за спљоштеност Земље из до тада познатих положаја геодетских тачака, а Гаус дефинише геоид и истовремено са Лежандром проналази теорију најмањих квадрата. Средином деветнаестог века сведочи првом мерењу вертикалских отклона. У исто време физичар Фуко демонстрира окретање Земље и проналази жирокоп, а немачки геодета Хелмерт чини први покушај синтетизовања математичке и физичке основе геодезије.

Почетком двадесетог века долази до огромне промене у схватањима физичара, пре свега због Ајнштајнове специјалне и опште теорије релативитета које представљају уопштење Њутнове теорије гравитације. Идеја да је гравитација геометрија простора и времена суштински је обликовала физику, а директно је применљива чак и у неким геодетским проблемима.

Средином двадесетог века долази до технолошке револуције. На развој геодетских инструмената утиче пре свега проналазак радара. Отприлике у исто време појављују се и први практични електронски рачунари, отварајући до тада незамисливе хоризонте у области нумеричке математике. Увођење компјутера није само убрзало геодетска рачунања, већ је и револуционализовало размишљање геодета. Решења проблема која раније због огромне количине рачунских операција нису ни покушавана, постала су сада не само изводљива већ и веома лака.

Вековима су хоризонтални углови имали предност над дужинама због веће тачности и лакшег извођења мерења. Међутим, убрзо након другог светског рата, у широку геодетску употребу улазе довољно тачни и комерцијално доступни електромагнетни уређаји за мерење дужина. Ови инструменти, засновани испрва на поларизованој светлости, затим на радио таласима и коначно на ласеру, у потпуности су изменили слику геодетског позиционирања.

Лансирање првог вештачког сателита био је следећи циновски корак за геодезију. По први пут су геодете могле користити активна и пасивна екстратерестричка тела за тачно позиционирање тачака, а да се при томе не поставља услов њиховог догледања. Ниске висине лета сателита пружиле су могућност истраживања геометрије Земљиног гравитационог поља помоћу директних мерења поремећаја сателитских путања. Друго достигнуће космичког програма представљају системи инерцијалне навигације и позиционирања. Ови комплексни системи остварени су захваљујући повећању тачности сензора за које је најзаслужнији спектакуларни развој микроелектронике.

Лакоћа и тачност којом су геодете могле одређивати положаје тачака и параметре гравитационог поља водили су новим применама, али и поставили нове проблеме. Оно што је раније могло бити занемарено сада се појавило као ефекат који се мора обрачунати. Друге дисциплине нагло су постале заинтересоване за геодетске методе и резултате ради ефикаснијег истраживања својих феномена. Примери таквих веза су оне са геофизиком, космичким наукама, астрономијом и океанографијом. Веза геодезије са геофизиком била је посебно плодносна још из једног разлога. Наиме, касних шездесетих година двадесетог века коначно је прихваћена Вегенерова хипотеза о померању континената. Брзина тектонских кретања довољно је велика да се може директно мерити геодетским методама. Геодезија је стога постала главни извор геометријских информација о овом кретању, и та улога јој је отворила примену и у другим подручјима геодинамике (Катедра за геодезију и геоинформатику, 2024).

## **1.2. Теоријске основе геодезије**

Стандардну основу многих наука, укључујући и геодезију, представљају пре свега математика, физика и компјутерске науке (Благојевић Д., 1999):

1. Математика је без сумње најважнији градивни елеменат геодезије. Неки извори сматрају геодезију граном примењене математике. Много тога се може рећи у прилог овом гледишту, јер је геодезија у суштини геометрија примењена на Земљу. Поред геометрије то су и алгебра, анализа и статистика.
2. Физика је геодетама важна скоро исто толико колико и математика. Још од Њутна, гравитација има велику улогу у геодезији. Овај значај само је порастао откад је утврђено да је гравитација у ствари геометрија простора у којем се изводе геодетска мерења. Данас се проучавање геометрије Земљиног гравитационог поља сматра делом геодезије а не физике. Подједнако фундаментални значај за геодезију има и теорија кретања електромагнетних таласа. Скоро сви геодетски инструменти користе принципе овог кретања на овај или онај начин, па је разумевање физичких закона кретања од суштинског значаја за наше разумевање природе прикупљених података. Како значајан број

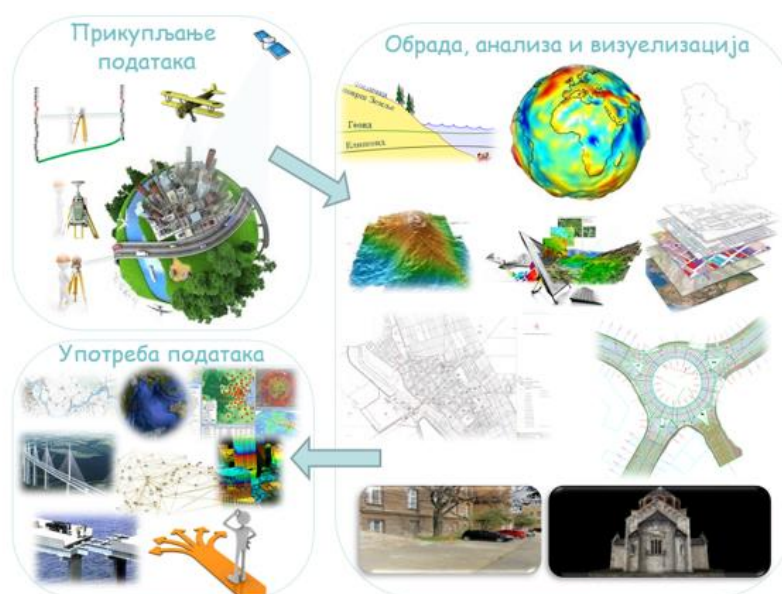
геодетских инструмената користи видљиви део електромагнетног спектра, јасна је потреба и за геометријском оптиком. Механика је у општем случају неопходна за разумевање кретања Земље и њених сателита.

- Многи проблеми са којима се геодезија данас суочава захтевају компјутерско решење. Геодете, као и други научници, морају имати одговарајуће знање барем једног програмског језика високог нивоа и да буду упознати са интерактивним и графичким могућностима компјутера. Због огромне количине података потребних за решавање већине геодетских проблема, геодете морају имати и одговарајуће образовање у рачунарском руковању базама података. Коначно, и различити концепти нумеричке анализе су исто тако потребни у геодезији.

### 1.3. Подела геодезије

Као што је то случај са већином научних дисциплина, и геодезија је подељена на поддисциплине. Према Ваничеку и Краковском (Благојевић, 1999) класичне поддисциплине су физичка, математичка и динамичка геодезија, са низом специјализованим теоријско-практичним областима као што су геодетски премер, катастар непокретности, фотограметрија, картографија, инжењерска геодезија или геодетска метрологија. Захваљујући новим технологијама, у последњих 50 година издвајају се и поддисциплине као што су сателитска, инерцијална, маринска и космичка геодезија.

Геодезија обухвата широк спектар активности, од постављања теоријских темеља геодетских метода, до прикупљања података, које се данас у највећој мери заснивају на информационим технологијама, а посебно на геоинформатици (Слика 1.6).



Слика 1.6. Обухват активности геодезије



Општа подела геодезије која је деценијама била присутна у уџбеничкој литератури била је подела на „вишу геодезију“ која се бави научним питањима, као што су одређивање облика и димензије Земље, и мерењима у оквиру чијих се прорачуна узима у обзир закривљеност Земље; и „нижу“ која се бави практичним задацима, као што су израда планова и карата, геодетски радови приликом изградње објеката, итд.

Имајући у обзир веома широк дијапазон задатака и проблема којима се бави геодезија број под дисциплина, односно геодезије је велик. Неке од области геодезије које су најзаступљеније су (Слика 1.7):

- Физичка геодезија
- Сателитска геодезија
- Геодетски премер
- Инжењерска геодезија
- Картографија
- Катастар и уређење земљишне територије
- Фотограметрија и даљинска детекција
- Геодетска метрологија
- Геоинформатика



Слика 1.6. Области геодезије

Физичка геодезија је област геодезије која се бави одређивањем поља силе Земљине теже при чему се користе три основна концепта/појма/површи: физичка површ тела Земље, геоид и елипсоид.

Сателитска геодезија је област геодезије која обухвата поступке и обраду прецизних мерења ка сателитима, од сателита и између сателита, који се изводе у циљу решавања различитих геодетских задатака. У ширем контексту, сателитска геодезија обухвата исто тако и опажања према природном Земљиним сателиту Месецу и удаљеним свемирским објектима као што су квазари, због чега се понекад у литератури назива и космичком или глобалном геодезијом.

Геодетски премер представља област геодезије која се бави организованим прикупљањем података о појавама и објектима на површи Земље за решавање практичних задатака као што су израда геодетских планова и карата или планирање и изградња инжењерских објеката.

Инжењерска геодезија или, како се често зове, примењена геодезија или геодезија у инжењерству је део геодезије који је уско повезан са другим техничким струкама као што су: грађевинарство, архитектура, урбанизам, машинство, бродоградња, рударство, енергетика, пољопривреда, шумарство, телекомуникације итд. Приликом пројектовања и реализације пројеката у наведеним областима, геодетски стручњаци решавају бројне проблеме, углавном везане за утврђивање просторног положаја и облика постојећих објеката или за просторно позиционирање пројектованих објеката у изградњи. Она је присутна у свим фазама реализације пројеката, у различитом обиму, почев од: истражних радова, пројектовања, грађења, испитивања понашања тла у непосредној зони грађења, пробном испитивању објекта у процесу грађења и након завршетка, а такође и у периоду експлоатације и коришћења објекта (конструкције). У сваком од тих процеса радова, геодезија се бави мерењима, обрадом резултата мерења и њиховом интерпретацијом на начин како то захтева фаза инжењерског процеса.

Картографија је уметност и наука прављења карата. Картографија укључује процес производње карте који се одвија на филозофским и теоријским основама прављења карата. Развој савремених технологија, пре свега дигиталне технологије и интернета, драматично су промениле свет визуализације геопросторних информација. Карте су постале интерактивне, скалабилне, мултимедоралне и тродимензионалне. Све је то довело до развоја нових области као што су геовизуализација и Веб картографија.

Катастар и уређење земљишне територије: Катастар непокретности је јавни регистар који представља основну евиденцију о непокретностима и правима на њима. У катастар непокретности уписују се подаци о непокретностима и правима на њима која се стичу, преносе, ограничавају и престају уписом у катастар непокретности. У оквиру израде и спровођења просторних и урбанистичких планова инжењери геодезије имају значајну улогу. Од фазе

пројектовања где су између осталог ангажовани на изради различитих врста подлога за пројектовање, тумачењу и прикупљању катастарских података, преко израде урбанистичких пројеката и пројеката препарцелације, све до спровођења урбанистичких аката на самом терену, улога инжењера геодезије је незаобилазна.

Фотограметрија и даљинска детекција: Мишљења стручњака се крећу од тога да је реч о једној научној дисциплини, до тога да је реч о два потпуно одвојеним научним дисциплинама. Обе дисциплине користе исте полазне претпоставке – снимање удаљеног објекта без директног контакта. Фотограметрија покрива традиционалне технике снимања и фокусирана је на човека као основно средство у интерпретацији снимака. Даљинска детекција користи искључиво дигиталну технику снимања и фокусирана је на технике аутоматске, рачунарски подржане, интерпретације. По формалној дефиницији, фотограметрија је уметност, наука и технологија за добијање поузданих информација о објектима реалног света и окружењу кроз процес снимања, мерења и интерпретације фотографских слика и узорака регистрованог зрачења електромагнетске енергије и других феномена. С друге стране, даљинска детекција је наука и уметност добијања корисних информација о објекту, подручју или феномену кроз анализу података добијених уређајем који није у контакту са објектом, подручјем или феноменом који се истражује (ASPRS, 1980).

Геодетска метрологија представља област геодезије која се бави мерним јединицама и њиховим еталонима, мерним инструментима и мерењима и обухвата све теоријске и практичне проблеме који се односе на мерења без обзира на њихову тачност.

Геоинформатика као област уско повезана с геодезијом, представља науку и технологију која развија и користи инфраструктуру информатике како би разрешила проблеме геонаука и других повезаних инжењерских струка. Другим речима, геоинформатика се бави структуром и садржајем просторних података, као и начинима њиховог прикупљања, моделовања, складиштења, анализе, обраде, презентације и дељења у оквиру дигиталног система.

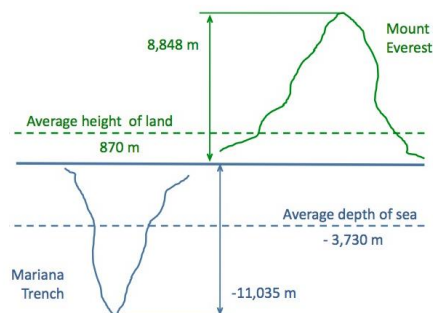
Више о областима можете прочитати на наредном линку:

<http://egeo.grf.bg.ac.rs/gig/fgeodezija.html>

## 2. Референтне површи, картографске пројекције и координатни системи

### 2.1. Апроксимација Земље – Ког је облика Земља?

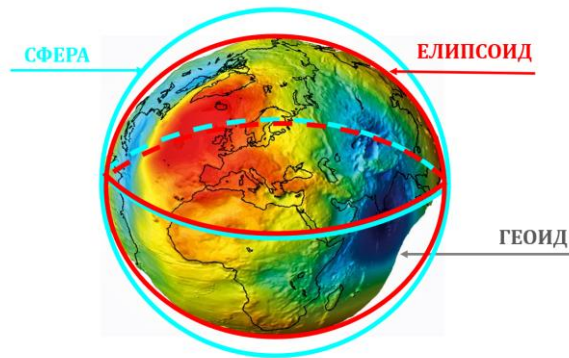
Према најзаступљенијој хипотези о настанку планете Земље, Земља је у свом настанку била усијана течна маса, која се одвојила од Сунца, пре више од 4,5 милијарде година. Свој облик је формирала под утицајем сопствене гравитационе силе као и гравитационе силе Сунца и других небеских тела. У протеклих неколико милиона година, за последицу утицаја разних физичких, хемијских и биолошких процеса, формирана је горња површ земљине коре, тј. физичка површ Земље. Од свог настанка па све до данас, површина планете Земље је у сталном процесу преобликовања и то под утицајем тектонских померања и ерозија. Данас се физичка површ Земље састоји од око 72% воде и 28% копна, са различитим облицима рељефа (планине, брда, долине, дрпресије, ...). Највиша тачка мерена у односу на глобални средњи ниво мора се налази на Монт Евересту и износи 8.848 m, док је најнижа тачка лоцирана у Маријанском рову, у Тихом океану (NOAA, 2024).



Слика 2.1. Највиша и најнижа тачка на Земљи, мерена у односу на средњи глобални ниво мора (A+Click, 2024)

Дакле, како је Земљина површ веома сложене природе и неправилног је математичког облика, одређивање њеног облика и димензије представља један веома комплексан задатак, којим се управо баве научници у области геодезије.

За апроксимацију Зеље се користе сфера, обртни елипсоид и геод (Слика 2.2.).



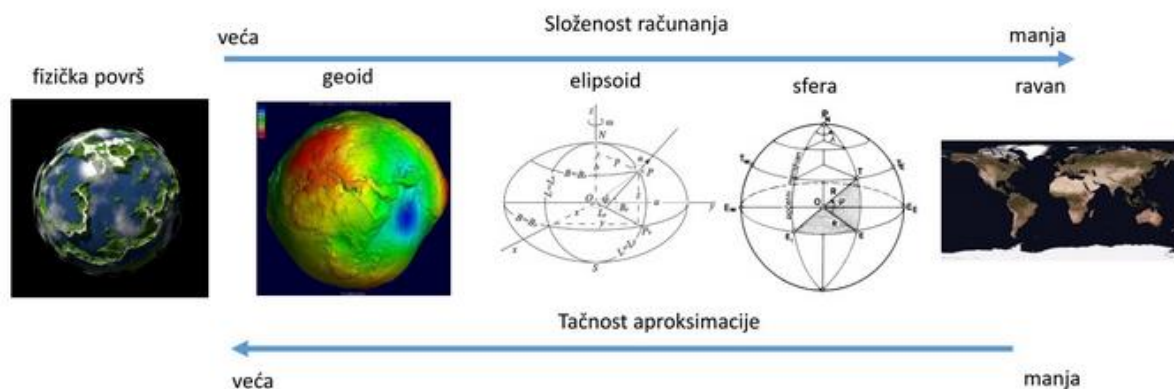
Слика 2.2.: Апроксимација Земље

Према Њутновом (Newton) закону универзалне гравитације – Хомогена течна маса ослобођена свих спољашњих и унутрашњих утицаја, у стању мировања, уз минимум утrophка енергије, заузеће облик лопте (сфере). Пошто је сопствена гравитациона сила имала највећи утицај на формирање облика Земље, за прво приближење (апроксимацију) облика Земље може се узети облик сфере. Последица сопствене ротације је центрифугална сила, која је у оси ротације једнака нули а повећава се сразмерно растојању од осе ротације. Ова сила утицала је да облик Земље уместо облика сфере буде приближнији облику обртног елипсоида.

Када би Земља била савршено хомогена сфера њено гравитационо поље би се веома лако могло описати. У свакој тачки простора вектор силе теже био би усмерен ка центру масе Земље, а интензитет привлачења зависио би само од удаљености. Реална Земља је, међутим, неправилног облика са нехомогеним распоредом маса, тако да је њено гравитационо поље врло компликована функција положаја која се не може представити у затвореном облику. Уместо векторског поља силе теже може се користити еквивалентно скаларно поље потенцијала силе Земљине теже. Потенцијал се дефинише као поље чији просторни градијент у свакој тачки даје компоненте вектора силе теже дуж координатних оса. Геометријско место тачака са истим потенцијалом зове се екипотенцијална површ. То су затворене, конвексне површи константног потенцијала, на међусобном растојању које зависи од интензитета силе Земљине теже. Правац вертикале у свакој тачки је управан на екипотенцијалну површ која кроз ту тачку пролази, одакле следи да су вертикале просторне криве линије. Од бесконачно много екипотенцијалних површи може се изабрати једна која се поклапа са идеализованим средњим нивоом светских мора и океана. Та површ назива се геоидом, и она представља природан избор за референцу од које ће се рачунати висине тачака (Благојевић, 2014). Дакле, геоид је екипотенцијална површ, на коју је, у свакој њеној тачки, правац силе теже управан. **Геоид је неправилна површ, која се поклапа са мирном површи воде у океанима.**

Геоид је најреалнија апроксимација Земље, није симетричан и веома је комплексан да се опише математички. Геоид, који се на океанима поклапа са нивоом воде мора и окена, ако би се тај ниво продужио испод континената, тако да је у свакој његовој тачки сила теже усмерена по нормали, добио би се геоид (у ствари, нормална је на тангенту раван геоида у тачки посматрања). Површ геоида, иако глатка, због нерегуларног распореда и густине земљиних маса има низ таласа (ундулација), тј. врло је сложеног облика и несиметричног је у односу на обртну осу (Јовановић, 1984; Килибарда, 2023).

Геоид је веома погодан за изучавање поља силе Земљине теже, али је његова површ неправилна и математички се не може изразити у целини, па једначине за одређивање координата тачака, дужина и углова постају неупотребљиве. Само висине тачака, односно растојања између геоида и физичке површи Земље, узета дуж вертикала односних тачака, погодне су за коришћење у математичкој картографији. (Килибарда, 2023). Стога за потребе одређивања координата тачака, односно позиције тачака, углавном користимо криволинијске координате на сфери или још чешће на елипсоиду, правоугле тро-димензионалне (3Д) које су такође везане за сферу, односно обртни елипсоид и дво-димензионалне (2Д) координате у равни. Комплексност апроксимације је корелисана са сложености рачунања на референтној површи (Varga 2021, Килибарда, 2023), као што је приказано на слици 2.3.



Слика 2.3. Апроксимација Земље коришћењем различитих површи (Килибарда, 2023)

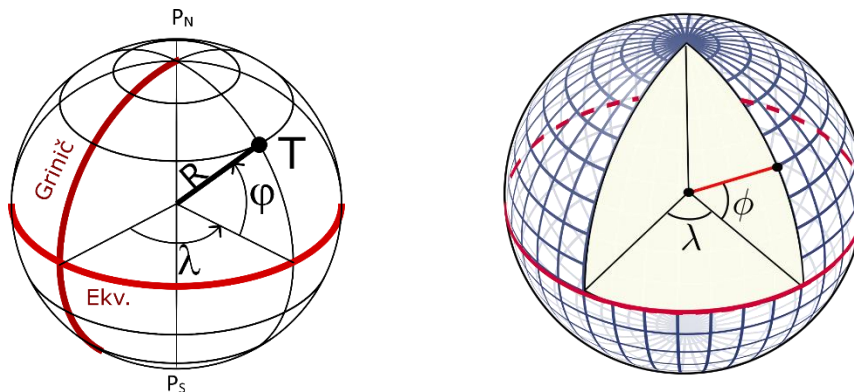
## 2.2. Криволинијске и правоугле 3Д координате

За опширније информације можете отићи на линк <https://osgl.grf.bg.ac.rs/books/mk/02-Koordinatni.html>

### 2.2.1. Координате – апроксимација Земље сфером

Кад се планета Земља апроксимира сфером (лоптом) која је референтна површ (веће сложености него раван, али се занемарује чињеница да је Земља спљоштена на половима и да је боља апроксимација елипсоид, (видети Слика 2.2.), подразумева се да се центар сфере поклапа са центром масе Земље.

Полупречник који пролази кроз усвојену позицију Северног и Јужног пола назива се обртна оса лопте или сфере, обртна оса је пречник  $P_N P_S$  (Слика 2.4).



Слика 2.4. Апроксимација Земље сфером-криволинијске координате (Килибарда, 2023)

Меридијанске равни секу сферину површ по великим круговима тако да меридијани на сфери одговарају великим круговима. Паралеле представљају мале кругове, осим Екватора који пролази кроз центар сфере. Координатни почекат на сфери дефинисан је пресеком Екватора и усвојеног почетног меридијана (који пролази кроз Гриничку обсерваторију).

Криволинијске координате тачке Т на сфери (Слика 2.4):

$\phi$  - ширина (угао који радијус Земље у односној тачки заклапа са екваторском равни).

$\lambda$  - дужина (угао који раван меридијана односне тачке заклапа са равни почетног меридијана-Гриничког меридијана).

Поред криволинијских/угловних координата положај тачке Т можемо да изразимо и правоуглим 3Д координатама, у правоуглом 3Д координатном систему који је дефинисан на следећи начин (Слика 2.5.):

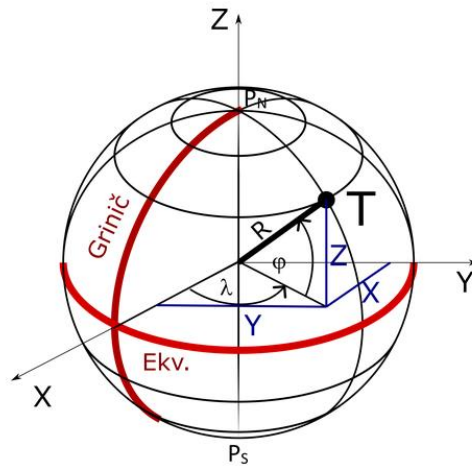
Центар координатног сисема се поклапа сацентаром масе Земље

Z оса - обртна оса лопте или сфере,  $P_N P_S$

X оса – у екваторијалној равни, у правцу пресека гриничког меридијана и екватора

Y оса – у екваторијалној равни, и комплетира правоугли координатни систем десне оријентације.

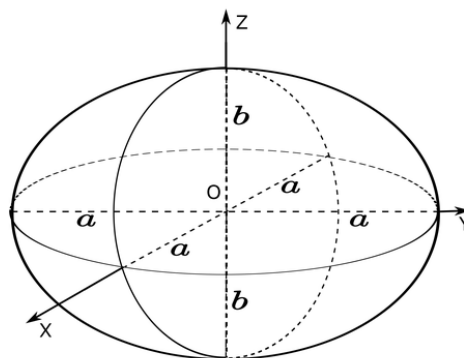




Слика 2.4. Апроксимација Земље сфером-криволинијске координате (Килибарда, 2023)

### 2.2.2. Координате – апроксимација Земље елипсоидом

Као што је објашњено у подпоглављу Облик и димензије земље, осим сфере, за ближу апроксимацију Земље се користи обртни елипсоид. Обртни елипсоид је математичко тело које настаје ротацијом елипсе око велике или мале осе. У случају апроксимације Земље користи се елипсоид који настаје ротацијом око мале осе, која је дефинисана осом ротације Земље (Слика 2.5.).



Слика 2.5. Обртни елипсоид (Килибарда, 2023)

Основни параметри који се користе за дефинисање обртног елипсоида су велика полуоса ( $a$ ) и мала полуоса ( $b$ ). Поред основних параметара користе се и изведени параметри, односно:

$$f = \frac{a-b}{a} \text{ – спљоштеност елипсоида,}$$

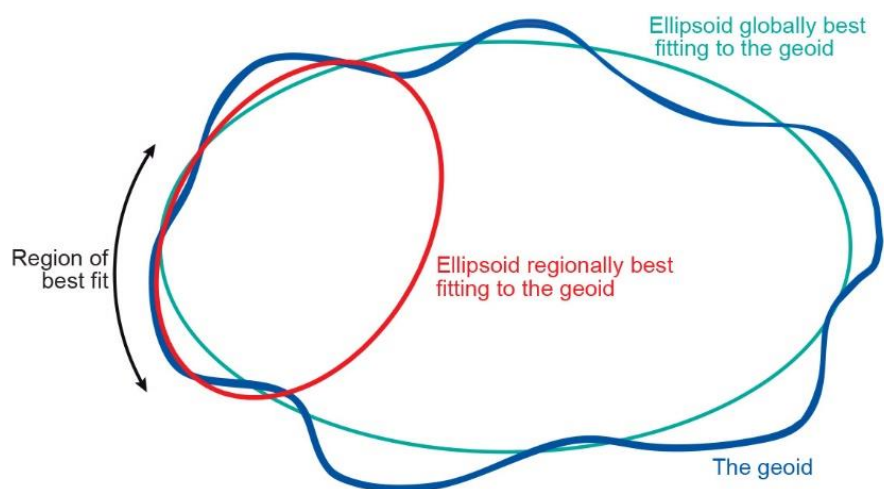
$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 2f - f^2 \text{ – квадрат првог нумеричког ексцентрицитета и}$$

$$e^2 = \frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{2f-f^2}{\sqrt{1-f}} = \frac{e^2}{1-e^2} \text{ – квадрат другог нумеричког ексцентрицитета.}$$

Ако су велика и мала полуоса једнаке ( $a=b$ ), јасно је да је тело сфера. У том случају сва три изведена параметра су једнака 0.



За дефинисање координатних система у пракси се користе различити обртни елипсоиди, од локалних који најбоље апроксимирају одређену територију планете Зеље до глобалних који најбоље апроксимирају целу површину Земље (Слика 2.6.).



Слика 2.6. Локални и глобални обртни елипсоид (Knippers, 2009)

Како оса ротације Земље није константна поставља се следеће питање а то је: Коју осу ротације треба узети за дефинисање мале полуосе обртног елипсоида? Дакле, да би позицију неке тачке  $T$  могли једнозначно да одредимо неопходно је да знамо у ком координатном систему одређујемо те координате.

Параметри неких од елипсоида који су у употреби су приказани у наредној табели:

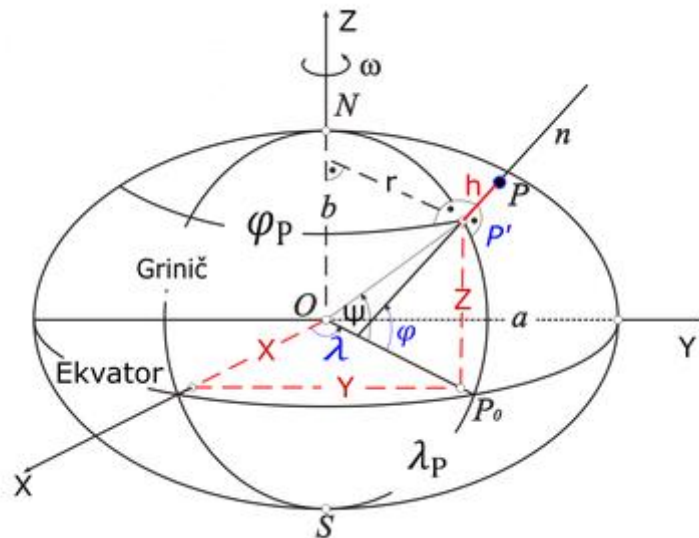
Елипсоид	Парамерри елипсоида	
	Велика полуоса $a$ [m]	Спљоштеност $f$
Bessel-ов, 1841	6 377 397	1/299.15281285
World Geodetic System, 1984 - WGS84	6 378 137	1/298.257223563
Geodetic Reference System 1980- GRS 80	6 378 137	1/298.257222101

Исто као код апроксимација сфером, тако и код апроксимација Земље са обртним елипсоидима положај тачке можемо дефинисати криволинијским координатама, геодетском (елипсоидном или географском) дужином и ширином (Слика 2.7):

$\varphi$  - геодетска ширина је угао у равни меридијана, између равни Екватора и нормале на елипсоиду која пролази кроз тачку  $P$ .

$\lambda$  - геодетска дужина је угао између равни почетног меридијана (најчешће Гринички меридијан) и меридијанске равни која пролази кроз тачку  $P$ .

$h$  - геодетска (елипсоидна) висина је геометријска удаљеност од површи елипсоида (где је  $h=0$  m) до тачке  $P$  на физичкој површи Земље мерена дуж нормале на елипсоиду,  $P'P$  (Слика 2.7).



Слика 2.7. Обртни елипсоид за апроксимацију Земље са приказом координата (Килибарда, 2023)

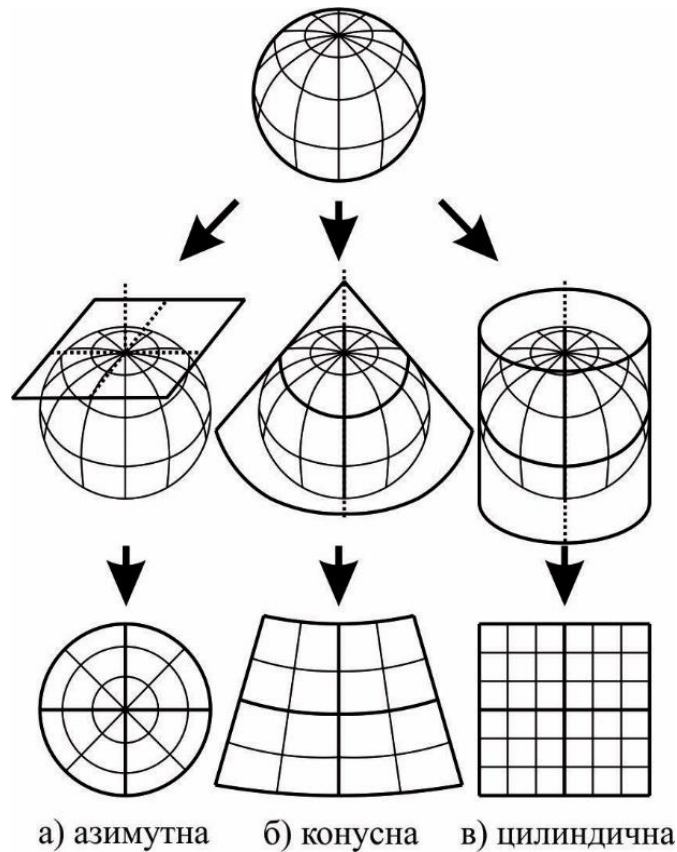
### 2.3. Картографске пројекције

Картографска пројекција је математички модел за пресликавање положаја са тро-димензионалне површи земље у дво-димензионални картографски приказ (Слика 2.8.). Ово пресликавање незаобилазно деформише поједине аспекте Земљине површи, као што су површина, облик, растојање, или правац.

Свака пројекција поседује одређене предности и недостатке. Не постоји “најбоља” пројекција. Неке од деформација конформности (облика), размере, растојања, праваца, и површина увек су резултат ових поступака. Поједине пројекције минимизирају деформације неких од наведених својстава по цену максимизирања грешака других својстава. Неке од пројекцијанастоје само да ублаже деформације свих наведених својстава.

Подела картографских пројекција према површи пројичирања (Слика 2.8):

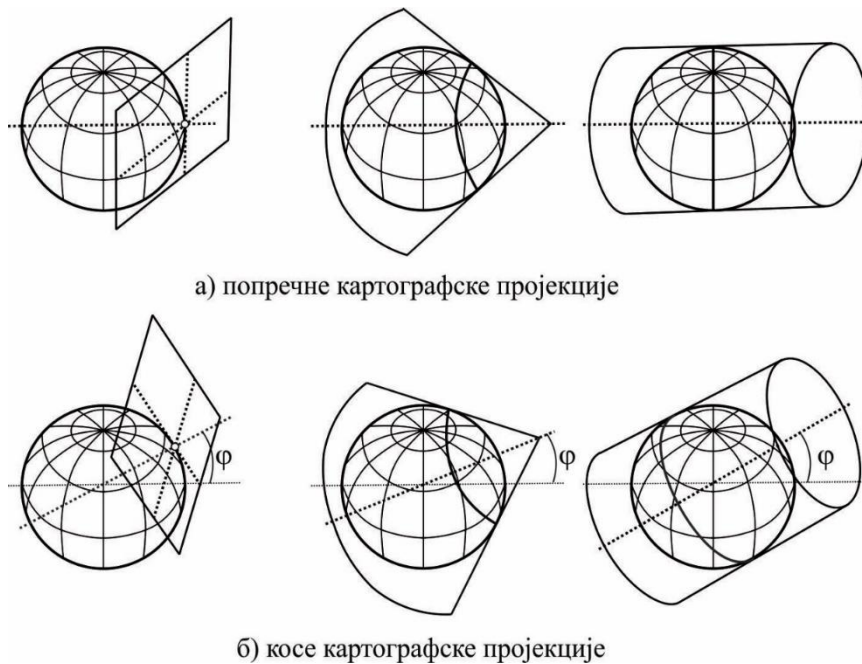
- а) Планарне (азимутне), пројичирање површи елипсоида на раван;
- б) Конусне, пројичирање површи елипсоида на конус;
- в) Цилиндричне, пројичирање површи елипсоида на цилиндар.



Слика 2.8. Подела картографских пројекција према површи пројигирања (Поповић, 2018)

Подела картографских пројекција према положају површи пројигирања (Слика 2.9):

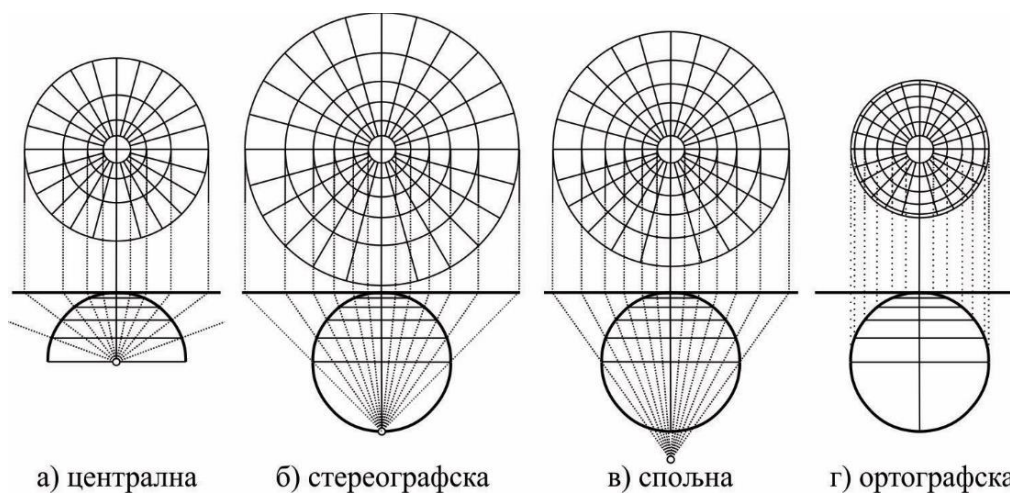
- а) Попречне, оса површи у екваторијалној равни;
- б) Косе, оса површи произвољне ширине (угао у односу на екваторијалну раван);
- в) Поларне, оса површи пројигирања поклапа се са малом осом елипсоида.



Слика 2.9: Подела картографских пројекција према положају површи пројцирања (Поповић, 2018)

Подела картографских пројекција према положају цетра пројцирања (Слика 2.10):

- а) Централне (гномонске) – центар пројцирања у центру елипсоида (лопте);
- б) Стереографске – центар пројцирања на површи елипсоида (лопте);
- в) Перспективне – центар пројцирања изван површи елипсоида.
- г) Ортографске – центар пројцирања налази се у бесконачности, пројцирање паралелно са осом површи или у случају цилиндра управно на осу површи;



Слика 2.10: Подела картографских пројекција према положају цетра пројцирања (Поповић, 2018)

Подела картографских пројекција према деформацији (Слика 2.11):

- а) Комформне – без деформације углова;
- б) Еквивалентне – без деформација површина;
- в) Еквидистантне – без деформација дужина.

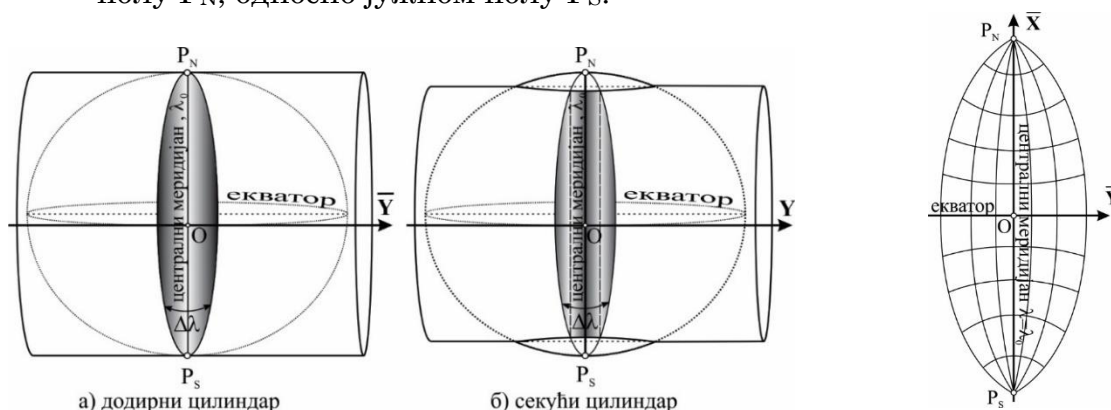
## 2.4. Координате у равни-2Д координате

### 2.4.1. Гаус-Кригера пројекција

У периоду од 1924. године до 2009. године, положајне координате терестричких тачака у Државном координатном систему изражавале су се у конформној Гаус-Кригеровој пројекцији. За референтни елипсоид Земље користи се Bessel-ов елипсоид.

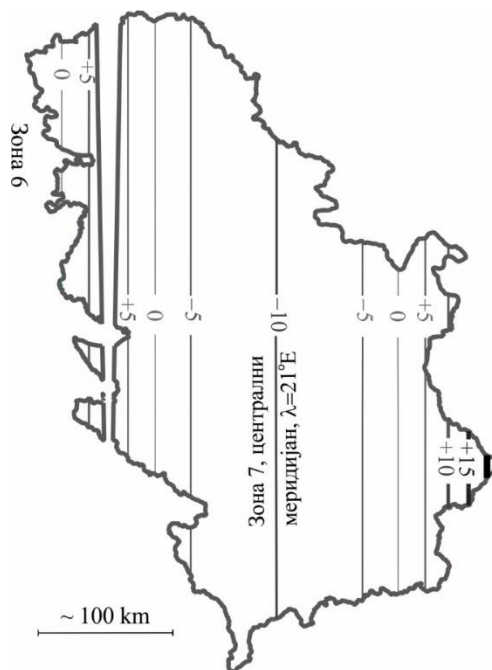
Особине Гаус-Кригера (Gauss-Krüger) пројекција (Слика 2.12):

- Попречна цилиндрична пројекција меридијанских зона;
- На цилиндар се пресликавају уске зоне по геодетској дужини (лонгитуди) око централног меридијана. Ширина зоне износи  $3^\circ$ ;
- Оса цилиндра – у екваторијалној равни;
- Цилиндар додирује референтни елипсоид по централном меридијану;
- У циљу повећања ширине зоне користи се секући уместо додирног цилиндра;
- Пресликавање је конформно, односно нема деформације углова;
- Деформације дужина, односно размера  $k$ , на ограниченем простору, исте су у свим правцима;
- Централни меридијан зоне пресликава се као права линија, без деформације и представља ординатну  $\bar{X}$  осу дводимензионалног Декартовог координатног система;
- Екватор се пресликава такође као права линија и представља апсцисну осу  $\bar{Y}$ ;
- Остали меридијани и паралеле пресликавају се као закривљене, међусобно управне линије;
- Пројекције меридијана конвергирају према северном полу  $P_N$ , односно јужном полу  $P_S$ .



Слика 2.12: Гаус-Кригера (Gauss-Krüger) пројекција

Територија Србије зоне 6 (централни меридијан = 18°) и 7 (централни меридијан = 21°) Гаус-Кригерове пројекције, деформације дужина

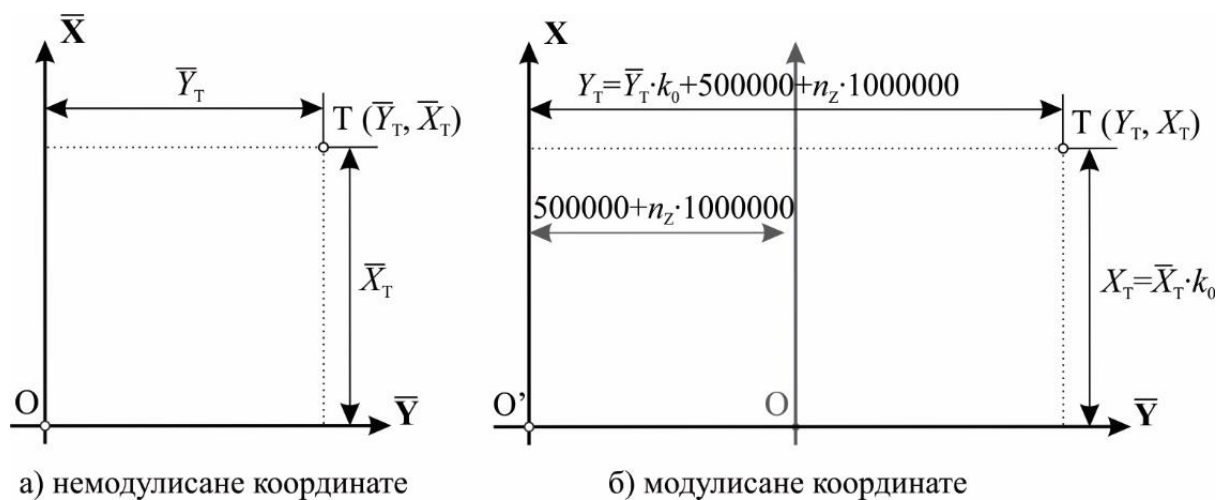


Слика 2.13: 6 и 7 зона Гаус-Кригерове пројекције са распоредом деформација дужина (Поповић, 2018)

Координате (Y, X) у Гаус-Кригеровој пројекцији се дефинишу по зонама на следећи начин (Слика 2.14):

- $Y_T = \bar{Y}_T \cdot k_0 + 500000 + n_z \cdot 1000000$
- $X_T = \bar{X}_T \cdot k_0$ ,

$\bar{Y}_T$  растојање тачке Т од додирног меридијана;  $\bar{X}_T$  - растојање тачке Т од екватора  
 $k_0$  - параметар размере (0.9999),  $n_z$  - број зоне



Слика 2.14. Формулација координата у Гаус-Кригеровој пројекцији по зонама (Поповић, 2018)



### 2.4.2. UTM пројекција

Од 2009. године у положајне координате терестричких тачака у Државном координатном систему изражавале су се у Универзалној трансверзалној Меркаторовој пројекцији - Universal Transverse Mercator, (UTM), елипсоида GRS 80.

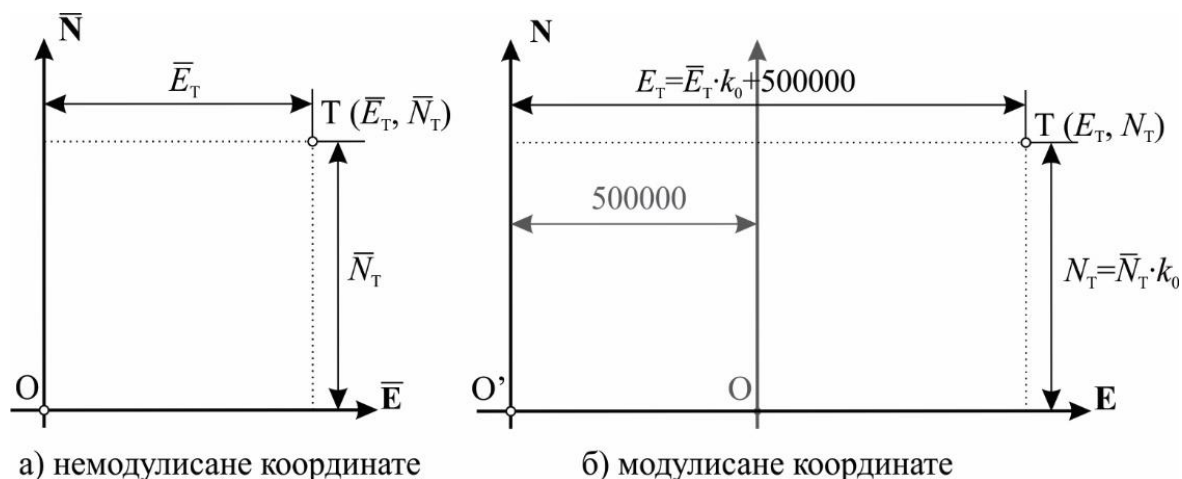
UTM пројекција представља модификацију Гаус-Кригерове пројекције, са 60 меридијанских (координатних) зона, односно ширином зоне од 6° Дакле, све особине које су претходно наведене за Гаус-Кригерову пројекцију односе се и на UTM пројекцију.

Цео свет је подељен у 60 зона ( $360^\circ/6^\circ$ ), прва зона је ограничена од  $180^\circ$  до  $174^\circ$  западне геодетске дужине (дакле почетак је супротно од Гриничког меридијана), а шездесета од  $174^\circ$  до  $180^\circ$  источне геодетске дужине. Територија наше земље се налази у подручју зоне 34N.

Координате (N, E) у пројекцији се дефинишу на следећи начин (Слика 2.15):

$$E_T = \bar{E}_T \cdot k_0 + 500000 \quad N_T = \bar{N}_T \cdot k_0$$

Вредност коефицијента разmere дуж централног меридијана износи  $k_0 = 0,9996$



Слика 2.15. Формулација координата у UTM пројекцији (Поповић, 2018)

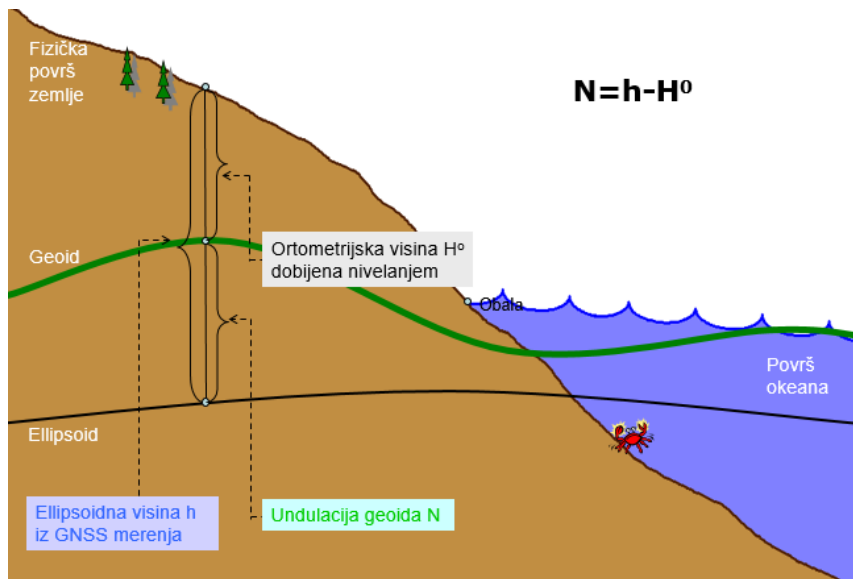
### 2.5. Системи висина

Геодетске једнодимензионалне мреже служе као основа вертикалне представе физичке површи Земље. У употреби су два система висина, елипсоидне и ортометријске висине.

Елипсоидна висина  $h$ , растојање по нормали на елипсоид између тачке на физичкој површи Земље и површи елипсоида;

Ортометријска висина  $H^o$  растојање по вертикали између тачке на физичкој површи Земље и површи елипсоида и површи геоида;

Разлика између елипсоидне и ортометријске висине се назива ундулација геоида,  $N$ .



Слика 2.16. Ортометријска и елипсоидна висина

Приликом одређивања ортометријских висина користе се методе мерења тригонометријског и геометријског нивелмана, док се код одређивања елипсоидних висина користе методе ГНСС-а.

Основу за одређивање ортометријских висина тачака на територији наше земље представљају мреже нивелмана високе тачности I (НВТ I) и нивелмана високе тачности II (НВТ II).



## Литература

A+Click (2024) Math and Logic Problems-to develop logical reasoning and problem solving skills Преузето са: <https://aplusclick.org/k/4444.htm>

Благојевић Д. (1999) Геодезија-Концепти, превод књиге

Благојевић, 2014 Увод у Сателитску геодезију, Грађевински факултет, Београд

Ellipsoid, The Core of GIS Science 2020 (Open Access for Exam)" study area.

Jochen A. (2024) Determining the earth's size Преузето са:

<http://www.geo.hunter.cuny.edu/~jochen/gtech201/lectures/lec6concepts/datums/determining%20the%20earths%20size.htm>

Јовановић В. (1984). Математичка Картографија. ВГИ.

Катедра за геодезију и геoinформатику, Приступљено 01.2024:

<http://egeo.grf.bg.ac.rs/gig/geodezija.html>

Килибарда М, Математичка картографија, 2023, Преузето са:

<https://osgl.grf.bg.ac.rs/books/mk/01-Kartografija.html>

Килибарда М., Протић Д. (2018) Геовизуализација и Веб картографија

<https://osgl.grf.bg.ac.rs/books/gvkv/koordinatni-referentni-sistemi.html>

Knippers R. (2009) Reference surfaces for mapping Преузето са:

<https://ltb.itc.utwente.nl/498/concept/81570>.

NOAA-National Ocean and Atmospheric Administration, United States government

(2024a) Преузето са: <https://oceanservice.noaa.gov/> How deep is the ocean?

<https://oceanservice.noaa.gov/facts/oceandepth.html>; What is the highest point on Earth as measured from Earth's center? <https://oceanservice.noaa.gov/facts/highestpoint.html>;

Planet Postcard: The Mariana Trench <https://www.ncei.noaa.gov/news/planet-postcard-mariana-trench>

Поповић Ј. (2018) Писана предавања из Геодетско премера 1, Грађевински факултет, Универзитет у Београду

ScienceDirect, Geodesy, Преузето са:<https://www.sciencedirect.com/topics/physics-and-astronomy/geodesy>

Може бити занимљиво:

[https://www.ngs.noaa.gov/corbin/class\\_description/NGS\\_Video\\_Library.shtml](https://www.ngs.noaa.gov/corbin/class_description/NGS_Video_Library.shtml)